# Lehrbuch

der

# Mechanik fester Körper

und

der Berechnung

des

# Effektes der Maschinen.

Von

**G. Coriolis,**

Mitglied des Institutes von Frankreich, ehemaliger Professor und Studiendirektor an der polytechnischen Schule zu Paris, Oberingenieur des Brücken- und Wegebaues, etc. etc.

Deutsch herausgegeben

von

**Dr. C. H. Schnuse.**



Mit einer Figurentafel.

**Braunschweig.**

Verlag von G. C. E. Meyer sen.

1846.

## Vorwort des Uebersetzers.

Jeder Kenner der technisch-mechanischen Literatur weiß, daß Coriolis Leistungen in diesem Zweige der Mathematik, gleich denen von Poncelet und Navier, zu den vorzüglichsten der neuern Zeit gehören.

Der Zweck der deutschen Herausgabe von Coriolis „Traité de la Mécanique des Corps solides et du Calcul de l'Effet des Machines, Séconde Édition, Paris 1845." welche schon durch den klassischen Werth des Werkes selbst hinreichend gerechtfertigt würde, ist zunächst der: zu Poncelet's »Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen« als Einleitung und Ergänzung zu dienen, indem die erste Abtheilung des gegenwärtigen Werkes die zum Studium der Maschinen erforderlichen allgemeinen Lehren der Mechanik fester Körper enthält, welche Poncelet voraussetzt, und in der zweiten Abtheilung desselben Manches weiter ausgeführt wird, als bei Poncelet. —

Was die deutsche Ausgabe selbst anlangt, so wird sie hoffentlich den Eindruck eines deutschen Originales machen, alle Vorzüge des französischen Originales erhalten und zugleich den Vortheil der größern Billigkeit darbieten. —

# Inhaltsverzeichniß
## der ersten Abtheilung.

### Erstes Kapitel.

Geschwindigkeit, Kraft, Gewicht, Masse und Bewegung eines materiellen Punktes.

## Zweites Kapitel.

## Drittes Kapitel.

# Erste Abtheilung.

## Erstes Kapitel.

### Geschwindigkeit, Kraft, Gewicht, Masse und Bewegung eines materiellen Punktes.

Absolute und relative Bewegung.

§. 1. Wenn ein Körper seine Lage im Raume verändert, so sagen wir, daß er in Bewegung sei, und nennen diese Bewegung eine absolute, wenn wir die successiven Lagen des Körpers auf feste Punkte beziehen; aber wenn sich zwei Körper im Raume bewegen, und man betrachtet die Bewegung des einen in Beziehung auf den andern, so wird dieselbe eine relative Bewegung genannt, wovon man einen vollständigern und deutlichern Begriff gibt, wenn man sagt: daß die relative Bewegung diejenige ist, welche einer dieser beiden Körper für einen Beobachter anzunehmen scheint, welcher sich mit dem andern Körper fortbewegt, aber seine Lage als fest betrachtet. Von dieser Art sind alle Bewegungen, welche wir auf der Oberfläche der Erde beobachten, und welche wir für absolute Bewegungen halten, weil wir sie auf Punkte beziehen, die wir als fest betrachten. Dieser Umstand hat, wie wir in der Folge sehen werden, auf die Anwendungen der Mechanik weiter keinen Einfluß; allein diese Bewegungen sind in der That nur relative, weil sich die Punkte, worauf wir sie beziehen, mit der Erde im Raume fortbewegen.

Um die Untersuchungen über die Bewegung zu vereinfachen, wollen wir zunächst nur materielle Punkte, d. h. Körper betrachten, deren sämmtliche Dimensionen gegen die von ihnen durchlaufenen Räume als unendlich klein angesehen werden können.

## Geschwindigkeit.

§. 2. Zur Beurtheilung der Bewegung eines materiellen Punktes im Raume muß man nothwendig zwei Elemente kennen, nämlich: 1) seine successiven Lagen, oder die durchlaufenen Räume, und 2) die Zeiten, welche dieser materielle Punkt gebraucht, um von einer dieser Lagen in die andere überzugehen, oder diese Räume zu beschreiben.

Wir wollen zunächst annehmen, daß sich der materielle Punkt nach einer geraden Linie fortbewegt und seine successiven Lagen auf einen in dieser geraden Linie angenommenen festen Punkt, z. B. auf die anfängliche Lage, welche man den Anfangspunkt der Bewegung nennt, beziehen. Es bezeichne $e$ die Entfernung des materiellen Punktes von diesem Anfangspunkte nach Verlauf einer gewissen Anzahl von Zeiteinheiten, welche wir mit $t$ bezeichnen wollen, wo diese Entfernung z. B. als positiv betrachtet wird, wenn sich der materielle Punkt zur Rechten des Anfangspunktes und als negativ, wenn er sich zur Linken desselben befindet, und endlich im Anfangspunkte der Bewegung selbst $=0$ ist; d. h. wenn $t=0$ ist, so ist auch $e=0$.

Wenn das Verhältniß $\frac{e}{t}$ während der ganzen Bewegung einen konstanten Werth behält, d. h. wenn der Raum $e$ der Zeit $t$ stets proportional ist; so sagt man, die Bewegung ist gleichförmig, und diese ist die einfachste von allen möglichen Bewegungen. Die gleichförmigen Bewegungen unterscheiden sich durch die Größe des Verhältnisses $\frac{e}{t}$ von einander, und wenn dieses Verhältniß bei einer gleichförmigen Bewegung größer ist, als bei einer andern, oder wenn der nach Verlauf derselben Zeit $t$ bei der ersten Bewegung durchlaufene Raum größer ist, als bei der zweiten; so nennt man die erste schneller, als die zweite, weshalb man auch das Verhältniß $\frac{t}{e}$ die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung nennt.

Wenn $t$ in $t+\Delta t$ und $e$ in $e+\Delta e$ übergeht, so daß $\Delta t$ die zum Durchlaufen des Raumes $\Delta e$ erforderliche Zeit ist; so hat man nach dem Begriffe der gleichförmigen Bewegung:

$$\frac{e}{t}=\frac{e+\Delta e}{t+\Delta t}, \text{ folglich } \frac{e}{t}=\frac{\Delta e}{\Delta t}.$$

Das Verhältniß $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ kann also eben so wohl, wie $\frac{e}{t}$ als Maß der Geschwindigkeit betrachtet werden, und zwar, wie klein die Zeit $\Delta t$ auch sein mag. Wenn also $dt$ ein unendlich kleines Zeitelement, d. h. welches kleiner ist, als jede angebbare Zeit, und $de$ den während dieses Zeitelementes von dem materiellen

Punkte durchlaufenen Weg bezeichnet; so kann die Geschwindigkeit wieder durch das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ ausgedrückt werden.

§. 3. Die Bewegung kann so beschaffen sein, daß das Verhältniß $\frac{e}{t}$, oder $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, oder $\frac{de}{dt}$ nicht konstant bleibt; alsdann ist sie keine gleichförmige mehr, und wird deshalb eine veränderliche Bewegung genannt.

Es bezeichne $de$ wieder den unendlich kleinen Weg, welchen der materielle Punkt nach Verlauf der Zeit $t$ während des unendlich kleinen Zeitelementes $dt$ durchläuft; so kann die Bewegung während dieser unendlich kleinen Zeit als gleichförmig betrachtet werden, und das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ ist wieder der Ausdruck der Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit $\frac{de}{dt}$, mit welcher sich der materielle Punkt bewegen würde, wenn er während einer endlichen Zeit die gleichförmige Bewegung beibehielte, welche er nur während einer unendlich kleinen Zeit beibehält, wird die Geschwindigkeit der veränderlichen Bewegung genannt, und ist nicht konstant, wie bei der gleichförmigen Bewegung, sondern nimmt jeden Augenblick einen andern Werth an.

Das bisher Gesagte läßt sich auch leicht geometrisch darstellen. Denn wir wollen annehmen, daß sich der materielle Punkt auf der vertikalen geraden Linie **AE** (Fig. 1) von **A** gegen **E** bewegt, während diese gerade Linie in derselben Ebene, welche die der Figur ist, parallel zu sich selbst so fortrückt, daß die Entfernungen **AA′**, **AA″**, etc. der Zeit proportional sind, und als Maß derselben dienen können; so ist leicht einzusehen, daß der materielle Punkt, wenn er sich auf der geraden Linie **AE** gleichförmig bewegt, während diese gerade Linie in der Ebene **EAT** gleichförmig fortrückt, in dieser Ebene eine gerade Linie $Am'm''$ beschreibt. Denn wenn $A'm'$ und $A''m''$ zwei beliebige Räume darstellen, welche den durch **AA′** und **AA″** dargestellten Werthen von $t$ entsprechen; so hat man nach den Begriffen der gleichförmigen Bewegung:

$$\frac{A'm'}{AA'} = \frac{A''m''}{AA''},$$

d. h. die drei Punkte **A**, $m'$, $m''$ liegen in gerader Linie.

Wenn sich aber der materielle Punkt auf der geraden Linie **AE** nicht gleichförmig bewegt, während **AE** gleichförmig fortrückt; so kann derselbe auf der Ebene **AET** nur eine krumme Linie **AM′M″** beschreiben, deren Abscissen die Werthe von $t$ und deren Ordinaten die zugehörigen Werthe von $e$ sind. Das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ drückt alsdann bekanntlich die Neigung des Kurvenelementes, dessen Projektion $dt$ ist, gegen die Abscissenaxe **AT** aus, und obgleich diese Neigung von einem Punkte der Kurve zum andern veränderlich ist; so kann sie doch in der ganzen Ausdehnung des betrachteten Kurvenelementes als konstant angesehen werden, weil man dieses Element als geradlinig betrachten kann. Ebenso kann das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ des unendlich kleinen Raumes $de$ zu der zu seinem Beschreiben erforderlichen unendlich kleinen Zeit $dt$, obgleich es sich jeden Augenblick ändert, während der Zeit $dt$ als konstant, und folglich als der Ausdruck der Geschwindigkeit während dieser Zeit betrachtet werden.

§. 4. Wenn sich der materielle Punkt zuerst über dem Punkte **A**, oder überhaupt auf der Seite dieses Punktes befindet, wo die positiven Entfernungen $e$ genommen werden, und sich dann dem Anfangspunkte **A** nähert; so entsprechen positiven Werthen von $dt$ negative Werthe von $de$, weil $e$ abnimmt, und $\frac{de}{dt}$ ist alsdann negativ. Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes muß also in diesem Falle als negativ betrachtet werden.

Wenn sich der bewegliche Punkt zuerst unter dem Anfangspunkte **A**, oder überhaupt auf der Seite desselben befindet, wo die negativen Entfernungen $e$ genommen werden, und sich dann diesem Anfangspunkte **A** nähert; so hat $de$ für positive Werthe von $dt$ das entgegengesetzte Zeichen von $e$, d. h. $de$ ist positiv, und folglich auch das Verhältniß $\frac{de}{dt}$. Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes muß also in diesem Falle als positiv betrachtet werden.

Wenn der bewegliche Punkt wieder auf der Seite der negativen $e$ liegt und sich vom Anfangspunkte **A** entfernt, so hat $de$ dasselbe Zeichen als $e$, d. h. $de$ ist für positive Werthe von $dt$ negativ, und folglich das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ negativ. Die Geschwindigkeit muß also in diesem Falle als negativ betrachtet werden.

Kurz, die Geschwindigkeit muß jedesmal als positiv betrachtet werden, wenn sich der materielle Punkt in dem Sinne der positiven $e$ bewegt, und als negativ, wenn er sich in entgegengesetztem Sinne bewegt.

### Trägheit und Kraft.

§. 5. Die Erfahrung lehrt, daß ein Körper, welcher sich mit einer gewissen Geschwindigkeit nach einer gewissen Richtung bewegt, diese Richtung und diese Geschwindigkeit desto länger behält, oder wenigstens zu behalten strebt, jemehr die äußern Hindernisse, wie der Widerstand der Luft, die Reibung, etc. beseitigt werden, und man muß daher annehmen, daß der materielle Punkt seine ursprüngliche Geschwindigkeit und Richtung fortwährend beibehalten würde, wenn seine Bewegung durch keine fremdartige Ursache geändert würde.

Die Erfahrung lehrt auch, daß, wenn ein Körper oder materieller Punkt aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung übergeht, dieses immer vermöge einer fremden Ursache geschieht. Diese Eigenschaft der Materie, daß sie ihren Zustand der Bewegung, oder der Ruhe nicht von selbst ändern kann, wird die Trägheit oder das Beharrungsvermögen derselben genannt, und jede Ursache, welche den Zustand der Bewegung, oder der Ruhe eines Körpers verändert, oder zu verändern strebt, nennt man eine Kraft.

Bei einer Kraft ist dreierlei zu unterscheiden: 1) der Punkt, auf welchen sie wirkt, ihr Angriffspunkt; 2) ihre Richtung, d. h. die Richtung und der Sinn der geraden Linie, nach welcher sich der Körper oder materielle Punkt bewegen würde, wenn er der Wirkung dieser Kraft folgte, und 3) die Intensität oder Stärke dieser Kraft, welche sich, wie wir sogleich sehen werden, wie alle übrigen Größen, durch Zahlen ausdrücken läßt.

Die erste Idee der Kraft erhalten wir durch die Anstrengung oder den Druck, welchen wir ausüben müssen, um einen Körper gegen die Wirkung der Schwere in Ruhe zu erhalten, oder denselben nach einer gewissen Richtung fort zu ziehen oder zu schieben, so daß seine Geschwindigkeit allmählich zunimmr. Wenn man in beiden Fällen zwischen den Körper und die Hand, welche denselben in Ruhe erhält, oder fortbewegt, eine Federwage (Dynamometer) bringt, so erfährt die Feder eine gewisse Biegung, welche von der Stärke der wirkenden Kraft abhängt, und wenn zwei Kräfte unter denselben Umständen successive dieser Feder dieselbe Biegung geben; so müssen sie offenbar als vollkommen gleich angesehen werden. Denkt man sich alsdann, daß diese beiden gleichen Kräfte gleichzeitig und in demselben Sinne auf die Feder wirken, und durch ihre vereinte Wirkung dieser Feder einen neuen Grad von Biegung ertheilen; so muß jede Kraft, welche unter denselben Umständen für sich allein dieselbe Biegung der Feder bewirken kann, als der Summe der beiden ersten Kräfte oder dem Doppelten jeder derselben gleich betrachtet werden. Man sieht leicht ein, daß man auf dieselbe Weise darthun kann, daß eine Kraft das Dreifache, Vierfache, etc. einer andern Kraft ist, und wenn man die Kraft zur Einheit nimmt, welche einer gegebenen Feder eine bestimmte Biegung ertheilen kann; so kann man die Kräfte, wie alle übrigen Größen, messen, und folglich durch Zahlen ausdrücken.

## Beschleunigung.

§. 6. Wir wollen nun die Relationen zu bestimmen suchen, welche zwischen den Kräften und den durch sie hervorgebrachten Bewegungen statt finden, und zunächst den Fall betrachten, wo diese Kräfte beständig nach der Richtung der Geschwindigkeit des materiellen Punktes wirken, also die Bewegung desselben eine geradlinige ist. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die Wirkung einer Kraft auf einen Körper von der Geschwindigkeit unabhängig ist, welche dieser Körper schon hat, so daß diese Kraft, wenn sie einem ruhenden Körper während einer bestimmten Zeit eine gewisse Geschwindigkeit ertheilen kann, demselben bereits in Bewegung befindlichen Körper genau dieselbe Geschwindigkeitszunahme ertheilt.

Hieraus folgt: daß die Wirkung einer konstanten Kraft auf einen sich bereits mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegenden Körper darin besteht, diese Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleiche Größen zu vermehren. Wenn also $u$ die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers bezeichnet, und diese Geschwindigkeit nimmt während des Zeittheilchens $\Delta t$ um $\Delta u$ zu; so nimmt sie während eines zweiten Zeittheilchens $\Delta t$ wieder um dieselbe Größe $\Delta u$ zu, und das Verhältniß $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ bleibt konstant, so lange die Kraft konstant bleibt. Dieses Verhältniß $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, welches wir mit $\varphi$ bezeichnen wollen, wird die Beschleunigung genannt, und dasselbe drückt in der That die Geschwindigkeitszunahme $\Delta u$ aus, wenn die entsprechende Zeitdauer $\Delta t$ zur Einheit genommen wird.

Wenn $\mathbf{F}$ die Kraft bezeichnet, welche die Beschleunigung $\varphi$ hervorbringt, und $\mathbf{F}$ ist konstant; so ist $\varphi$ offenbar auch konstant, und wenn sich $\mathbf{F}$ während der Dauer der Bewegung ändert, so lehrt die Beobachtung, daß sich das Verhältniß $\varphi$ auf gleiche Weise ändert, d. h. die Werthe von $\varphi$ bleiben denen von $\mathbf{F}$ proportional. Wenn also die Beschleunigung $\varphi$ konstant ist, so wird sie auch durch eine konstante Kraft hervorgebracht.

Der freie Fall eines schweren Körpers im leeren Raume bietet ein Beispiel von einer Bewegung dar, worin die Beschleunigung konstant ist. Diese Beschleunigung, welche man mit $g$ zu bezeichnen pflegt, beträgt auf der Sternwarte zu Paris für jede Sekunde $9^{m},8088$, woraus folgt, daß die Kraft, welche den Fall der Körper bewirkt, d. h. die Schwerkraft, eine konstante Kraft ist, oder daß das Gewicht eines Körpers während der ganzen Dauer seines Falles dasselbe bleibt.

Wenn $p$ das Gewicht eines Körpers und $\mathbf{F}$ die Kraft bezeichnet, welche demselben in der Sekunde eine Beschleunigung $\varphi$ ertheilen kann; so hat man wegen der Proportionalität zwischen den Werthen von $\mathbf{F}$ und $\varphi$ die Relation:

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{F}{p}, \qquad \text{folglich} \quad \varphi = g\frac{F}{p}.$$

Die Erfahrung lehrt ferner, daß, wenn eine Kraft F successive auf zwei Körper von verschiedenen Gewichten $p$ und $p'$ wirkt, die Beschleunigungen $\varphi$ und $\varphi'$, welche sie denselben ertheilt, im umgekehrten Verhältnisse dieser Gewichte stehen, so daß man hat:

$$\varphi' = \frac{p}{p'}\varphi,$$

oder wenn man für $\varphi$ seinen Werth $\frac{g}{p}$F setzt:

$$\varphi' = \frac{gF}{p'}.$$

Die Relation $\varphi = \frac{gF}{p}$, welche für denselben Körper und für verschiedene Werthe der Kraft F statt findet, behält also auch ihre Gültigkeit, wenn man von einem Körper zu einem andern übergeht, und mithin werden die Gesetze der geradlinigen Bewegung, welche von einer Kraft hervorgebracht wird, die während der Dauer dieser Bewegung konstant bleibt, durch die eine Gleichung:

$$\varphi \text{ oder } \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{gF}{p}$$

ausgedrückt.

§. 7. In dem Vorhergehenden haben wir vorausgesetzt, daß die Kraft nach dem Sinne der Geschwindigkeit selbst wirkt; aber wenn sie in entgegengesetztem Sinne wirkte, so würde sie nicht eine Zunahme, sondern eine Abnahme der Geschwindigkeit hervorbringen, und die Größe $\Delta u$, folglich auch $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ oder $\varphi$ müßte alsdann das entgegengesetzte Zeichen der anfänglichen Geschwindigkeit $u$ haben. Wenn man F und $u$ als positiv betrachtet, wenn der Sinn ihrer Richtung der ist, in welchem die positiven Entfernungen $e$ zunehmen, und als negativ, wenn sie einen entgegengesetzten Sinn haben; so haben die Größen F und $\varphi$ immer dasselbe Zeichen, und die Relation:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{gF}{p}$$

findet sowohl in Beziehung auf die Zeichen, als in Beziehung auf die Zahlenwerthe statt.

## Masse.

§. 8. Die von der Schwere herrührende Beschleunigung $g$ ist nicht in allen Punkten der Erdoberfläche dieselbe, und z. B. unter dem Aequator etwas geringer, als zu Paris; aber wenn sich die Größe $g$ ändert, so ändert sich das Gewicht der Körper auch in demselben Verhältnisse, so daß für denselben Körper das Verhältniß $\frac{p}{g}$ seines Gewichtes zu der Beschleunigung $g$ eine konstante Größe ist, in welchem Punkte der Erdoberfläche sich dieser Körper auch befinden mag. Dieses Verhältniß $\frac{p}{g}$, welches sich von dem einen Körper zu dem andern ändert, aber für denselben Körper konstant ist, wird die Masse dieses Körpers genannt. Da man mit diesem letzten Ausdrucke gewöhnlich die Quantität der Materie bezeichnet, woraus ein Körper besteht, so haben wir noch näher zu zeigen, worauf sich diese letzte Bedeutung des Verhältnisses $\frac{p}{g}$ gründet.

Wenn man zwei völlig identische Körper zu einem einzigen vereinigt, so daß dieser zuverlässig die doppelte Quantität Materie enthält; so ergibt sich, daß auch das Gewicht doppelt so groß geworden, aber die Beschleunigung $g$ ungeändert geblieben ist, und folglich hat sich der Werth des Verhältnisses $\frac{p}{g}$ mit der Quantität der Materie zugleich verdoppelt, und im Allgemeinen findet man bei Körpern von derselben Substanz, daß sich die Quantität der Materie und das Verhältniß $\frac{p}{g}$ proportional ändern, so daß letzteres als Maß der erstern dienen kann. Bei verschiedenen Substanzen kann man zwar nicht unbedingt behaupten, daß einem doppelten Werthe von $\frac{p}{g}$ eine doppelte Quantität der Materie entspricht; allein die Analogie führt zu dieser Annahme, wodurch sich übrigens allein erklären läßt, wie das Gewicht doppelt so groß werden kann, ohne daß sich die Beschleunigung geändert hat. Die Quantität der Materie, oder die Masse eines Körpers kann folglich durch das Verhältniß $\frac{p}{g}$, welches man gewöhnlich durch $m$ bezeichnet, ausgedrückt werden. Man kann auch sagen: daß die Masse eines Körpers das Gewicht ist, welches er haben würde, wenn man denselben in eine Entfernung von der Erde bringen könnte, wo die Beschleunigung $g$ der Längeneinheit, d. h. $=1$ Meter ist; denn alsdann reducirte sich das Verhältniß $\frac{p}{g}$ auf $p$.

§. 9. In Frankreich, und bei wissenschaftlichen Untersuchungen sehr oft auch in Deutschland, nimmt man das Kilogramm oder das Gewicht von 1 Liter destillirtem Wasser bei der Temperatur von $4^0,1$, auf der pariser Sternwarte bestimmt, zur Einheit des Gewichtes, oder allgemein, zur Einheit der Kraft.

Die Beschleunigung $\varphi$ ist eine Länge, nämlich diejenige, welche der materielle Punkt in der Sekunde durchlaufen würde, wenn er sich während dieser Zeit mit der konstanten Geschwindigkeit bewegte, um welche seine Geschwindigkeit unter der Wirkung der Kraft **F** während derselben Zeit zugenommen hat. Die Einheit von $\varphi$ ist folglich das Meter, wie die von $g$ oder $9^m,8088$. Die Gleichung $\varphi = g\frac{F}{p}$ ist folglich homogen und drückt die Gleichheit zweier Längen aus, weil das Verhältniß $\frac{F}{p}$ eine abstrakte Zahl ist.

Diese Gleichung läßt sich auf eine andere Form bringen, wenn man den Begriff der Masse in dieselbe einführt; denn setzt man $\frac{p}{g} = m$, so verwandelt sie sich in folgende:

$$\varphi = \frac{F}{m} \text{ oder } F = m\varphi.$$

Relation zwischen einer Kraft von veränderlicher Stärke und der Bewegung, welche sie hervorbringt.

§. 10. Die Kraft **F** kann auch, statt konstant zu sein, ihre Intensität oder Stärke jeden Augenblick ändern, und dabei stets die konstante Richtung der Geschwindigkeit des bewegten Punktes beibehalten. Wenn man sich die Zeit in sehr kleine Intervalle $\Delta t$ getheilt vorstellt, so kann man annehmen, daß die Kraft **F** während der Dauer eines solches Zeittheiles $\Delta t$ nahe zu konstant bleibt, und alsdann hat man während dieser Zeit:

$$\varphi = \frac{\Delta u}{\Delta t} = g\frac{F}{p},$$

wie klein das Zeitintervall $\Delta t$ auch sein mag. Da die Beobachtung gezeigt hat, daß diese Gleichung wirklich für sehr kleine Zeitintervalle stattfindet, so nimmt man an, daß sie auch für unendlich kleine Zeittheilchen statt findet, und daß man folglich in aller Strenge hat:

$$\frac{du}{dt} = g\frac{F}{p},$$

wo $\frac{du}{dt}$ die Grenze von $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ bezeichnet, wenn sich $\Delta t$ ohne Ende dem Werthe Null nähert. Diese Formel wird übrigens durch die daraus abgeleiteten Folgerungen, welche mit der Beobachtung übereinstimmen, als richtig bestätigt, und man sieht leicht ein, daß sie sowohl für die Zeichen, wie für die absoluten Werthe stattfindet.

Vermittelst dieser Gleichung kann man alle Aufgaben über die geradlinige Bewegung der Körper oder materiellen Punkte lösen, wobei wir uns jedoch hier nicht aufhalten, sondern blos die beiden Hauptaufgaben näher erörtern wollen, um wenigstens zu zeigen, auf welche Maßeinheit jede Größe bezogen werden muß.

### Hauptaufgaben über die geradlinige Bewegung der Körper.

§. 11. **Erste Aufgabe:** Wenn die Kraft F gegeben ist, die dadurch hervorgebrachte Bewegung zu bestimmen.

Aufl. Wir wollen zunächst annehmen, daß die Kraft F konstant und sowohl, als das Gewicht $p$ des Körpers in Kilogrammen gegeben ist; so ist nach §. 6 die Beschleunigung der Geschwindigkeit in der Sekunde konstant und $= g\,\frac{F}{p}$, welches, wie $g$, Meter ausdrückt. Wenn $t$ die Anzahl der seit dem Augenblicke, wo die Geschwindigkeit des Körpers $= u_0$ war, verflossenen Sekunden und $u$ seine Geschwindigkeit am Ende dieser Zeit bezeichnet; so wird die Beschleunigung der Geschwindigkeit $u - u_0$ für die Zeit $t$ folglich ausgedrückt durch $g\,\frac{F}{p}\,t$, und man hat:

$$u = u_0 + g\,\frac{F}{p}\,t. \qquad (1)$$

Wenn $e$ den Raum bezeichnet, den der Körper seit dem Augenblicke, von welchem an die Zeit $t$ gezählt wird, und wo die Geschwindigkeit $= u_0$ ist, beschrieben hat; so hat man nach §. 3:

$$u = \frac{de}{dt},$$

woraus folgt, wenn man integrirt:

$$e = u_0 t + g\,\frac{F}{p}\,\frac{t^2}{2}. \qquad (2)$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Bewegung wird eine gleichförmig veränderliche genannt, wovon der vertikale Fall schwerer Körper im leeren Raume das bemerkenswertheste Beispiel darbietet. Wenn die Kraft F, wie wir bisher vorausgesetzt haben, in dem Sinne der anfänglichen Geschwindigkeit $u_0$ wirkt; so nimmt der Raum $e$ fortwährend mit der Zeit $t$ zu, und bleibt immer positiv; aber wenn die Kraft F in dem entgegengesetzten Sinne von dem der anfänglichen Geschwindigkeit $u_0$ wirkt, so muß man in der Gleichung (1) das Zeichen des Gliedes, worin die Kraft F vorkommt in das entgegengesetzte verwandeln. In diesem Falle hat der Raum $e$ einen größten positiven Werth, und wenn die Zeit $t$ nach Erreichung desselben noch weiter zunimmt; so nimmt der Raum $e$ wieder ab, wird Null, dann negativ und nimmt in negativem Sinne fortwährend zu.

Wenn der Körper, auf welchen eine konstante Kraft F wirkt, von der Ruhe ausgeht, so hat man blos:

$$u = g\,\frac{Ft}{p}$$

und:

$$e = g\,\frac{F}{p}\,\frac{t^2}{2}.$$

Die Kraft F kann also ausgedrückt werden durch:

$$F = \frac{2e}{gt^2}\,p.$$

Bei dem vertikalen Falle schwerer Körper im leeren Raume ist $F = p$, und wenn man der Kürze wegen $u_0 = 0$ setzt; so reduciren sich die Gleichungen (1) und (2) auf:

$$u = gt \text{ und } e = \frac{gt^2}{2},$$

und wenn man $t$ eliminirt, so erhält man:

$$e = \frac{u^2}{2g}, \text{ oder } u = \sqrt{2ge}.$$

Wenn der Körper mit einer Geschwindigkeit $u$ in vertikaler Richtung von unten nach oben bewegt wird, so läßt sich leicht zeigen, daß die größte Höhe, welche er erreicht, durch die Gleichung:

$$e = \frac{u^2}{2g}$$

gegeben wird. Diese Relation zwischen dem beschriebenen Raume $e$ und der Geschwindigkeit $u$ wird in der Mechanik sehr häufig angewandt. Bei dem Falle schwerer Körper pflegt man den Raum $e$ gewöhnlich mit $h$ zu bezeichnen, der Ausdruck $\frac{u^2}{2g}$ wird die der Geschwindigkeit $u$ entsprechende Fallhöhe und der Ausdruck $\sqrt{2gh}$ die der Fallhöhe $h$ entsprechende Geschwindigkeit genannt.

Wir wollen nun annehmen, daß die Kraft F veränderlich sei, so kann dieselbe als eine Funktion der Zeit $t$, oder des Raumes $e$, oder endlich der Geschwindigkeit $u$ gegeben sein, und in allen drei Fällen hat man nach §. 10:

$$\varphi \text{ oder } \frac{du}{dt} = g.\frac{\mathrm{F}}{p}. \tag{3}$$

Wenn die Kraft F als Funktion der Zeit gegeben ist, so daß $\mathrm{F} = f(t)$ ist; so verwandelt sich die Gleichung (3) in folgende:

$$du = \frac{g}{p} f(t)\, dt$$

und gibt:

$$u = u_0 + \frac{g}{p}\int_0^t f(t)\, dt,$$

folglich:

$$e = u_0 t + \frac{g}{p}\int_0^t dt \int_0^t f(t)\, dt.$$

Wenn die Kraft F als Funktion des Raumes $e$ gegeben, also $\mathrm{F} = f(e)$ ist, so erhält man, wenn man den ersten Theil der Gleichung (3) mit $u$ und den zweiten mit $\frac{de}{dt}$ multiplicirt:

$$udu = \frac{g}{p} f(e)\, de,$$

und wenn $u_0$ die dem Raume $e_0$ entsprechende Geschwindigkeit bezeichnet; so hat man, wenn man integrirt:

$$u^2 = u_0{}^2 + \frac{2g}{p}\int_{e_0}^{e} f(e)\, de.$$

Hieraus ergibt sich:

$$u = \frac{de}{dt} = \sqrt{u_0{}^2 + \frac{2g}{p}\int_{e_0}^{e} f(e)\, de},$$

folglich:

$$dt = \frac{de}{\sqrt{u_0{}^2 + \frac{2g}{p}\int_{e_0}^{e} f(e)\,de}},$$

und mithin:

$$t = \int_{e_0}^{e} \frac{de}{\sqrt{u_0{}^2 + \frac{2g}{p}\int_{e_0}^{e} f(e)\,de}},$$

Wenn die Kraft $\mathbf{F}$ als Funktion der Geschwindigkeit $u$ gegeben, also $\mathbf{F} = f(u)$ ist; so verwandelt sich die Gleichung (3) in folgende:

$$\frac{du}{dt} = \frac{g}{p} f(u),$$

woraus folgt:

$$dt = \frac{p}{g} \frac{du}{f(u)},$$

und wenn $u_0$ die $t = 0$ entsprechende anfängliche Geschwindigkeit ist; so erhält man, wenn man integrirt:

$$t = \frac{p}{g} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{f(u)}.$$

Wenn man diese letzte Integration verrichten und $u = \psi(t)$ oder $\frac{de}{dt} = \psi(t)$ erhalten kann, so ergibt sich:

$$e = \int_0^t \psi(t)\,dt.$$

§. 12. **Zweite Aufgabe:** Wenn die Bewegung des Körpers gegeben ist, die Kraft zu finden, welche jeden Augenblick auf denselben wirkt.

Aufl. Da die Bewegung des Körpers bekannt ist, so kann der Raum $e$ als eine gegebene Funktion der Zeit betrachtet werden, so daß man $e = f(t)$ hat. Hieraus ergibt sich durch Differenzirung:

$$\frac{de}{dt} = u = f'(t) \text{ und } \frac{du}{dt} = \varphi = f''(t),$$

und da die Beschleunigung $\varphi$ durch $g\,\frac{F}{p}$ ausgedrückt wird; so kommt:

$$g.\frac{F}{p}=f''(t), \text{ folglich } F=\frac{p}{g}.f''(t).$$

Da $t$ hier immer eine Anzahl von Sekunden und $f(t)$ eine Länge ausdrückt, weil $f(t)=e$ ist; so drücken die Ableitungen $f'(t)$ und $f''(t)$ auch Längen aus, und F drückt eine Anzahl von Kilogrammen aus, welche man erhält, wenn man das Gewicht $p$ des Körpers durch das Verhältniß $\frac{f''(t)}{g}$ zweier Längen, d. h. durch eine abstrakte Zahl multiplicirt.

Wenn sich der Körper vertikal auf- oder niederwärts bewegt, so ist sein Gewicht $p$ schon eine Kraft, welche successive auf ihn wirkt, und wenn man die Kraft F′ wissen will, welche man jeden Augenblick zu diesem Gewichte hinzufügen, oder davon hinwegnehmen muß, damit sich der Körper mit einer gegebenen Bewegung auf- oder abwärts bewegt; so hat man zur Bestimmung dieser Kraft die Gleichung:

$$p+F'=\frac{p}{g}f''(t), \text{ folglich } F'=p\left[\frac{f''(t)}{g}-1\right].$$

Jenachdem also $f''(t)$ größer, oder kleiner als $g$ ist, ist die Kraft F′ positiv, oder negativ, d. h. sie wirkt in dem Sinne von $p$, oder in dem entgegengesetzten Sinne.

Wenn z. B. ein Körper auf einer horizontalen Ebene liegt, welche sich mit einer gleichförmigen Bewegung abwärts bewegt; so ist der Druck, welchen diese Ebene von unten nach oben auf den Körper, oder der Druck, welchen dieser Körper von oben nach unten auf die Ebene ausübt, dem Gewichte des Körpers gleich, wie wenn die Ebene, worauf der Körper ruht, unbeweglich wäre. Denn da sich dieser Körper gleichförmig, d. h. so niederwärts bewegen soll, daß sich die beschriebenen Räume wie die Zeiten verhalten; so ist die Gleichung seiner Bewegung von der Form:

$$e=e_0+At,$$

d. h. in diesem Falle ist die Function $f(t)=e_0+At$. Man hat also:

$$f'(t)=A \quad \text{und} \quad f''(t)=0'$$

und folglich ist der Druck, welchen die Ebene auf den Körper ausübt, $F'=-p$ und der, welchen der Körper auf die Ebene ausübt, mithin $=+p$, d. h. gleich dem Gewichte des Körpers.

## Krummlinige Bewegung.

§. 13. Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die Kraft in der Richtung der Geschwindigkeit des Körpers selbst wirkt, in welchem besondern Falle die Bewegung geradlinig ist, und wir wollen nun untersuchen, was statt findet, wenn die Kraft jeden Augenblick nach einer andern Richtung, als die der Geschwindigkeit des Körpers wirkt, in welchem Falle die hervorgebrachte Bewegung eine krummlinige ist; aber zuvor ist erforderlich, daß wir einige neue Begriffsbestimmungen über die Geschwindigkeiten und Kräfte festsetzen.

### Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

Wenn sich ein materieller Punkt mit einer Geschwindigkeit $\omega = \frac{de}{dt}$ bewegt, deren Richtung mit drei rechtwinkligen Koordinatenaxen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bildet, und man projicirt jeden Augenblick die Lage dieses Punktes auf diese Axen; so kann man jede Projektion als einen Punkt betrachten, welcher sich auf der entsprechenden Axe bewegt. Die Projektion des beweglichen Punktes auf die Axe der $x$ z. B. beschreibt auf dieser Axe während des Zeitelementes $dt$ einen unendlich kleinen Weg $dx$, welcher nichts anders ist, als die Projektion des von dem materiellen Punkte im Raume wirklich beschriebenen unendlich kleinen Weges $de$, und die Geschwindigkeit der betrachteten Projektion wird nach dem in §. 3 Gesagten offenbar ausgedrückt durch $\frac{dx}{dt}$.

Die Geschwindigkeiten der Projektionen des beweglichen Punktes auf den drei Axen sind folglich:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

und da man hat:

$$dx = de.\cos\alpha, \; dy = de.\cos\beta, \; dz = de.\cos\gamma,$$

so ist auch:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{de}{dt}.\cos\alpha, \; \frac{dy}{dt} = \frac{de}{dt}.\cos\beta, \; \frac{dz}{dt} = \frac{de}{dt}.\cos\gamma,$$

oder wenn man die Geschwindigkeiten der Projektionen mit $u$, $v$, $w$ bezeichnet:

$$u = \omega\cos\alpha, \quad v = \omega\cos\beta, \quad w = \omega\cos\gamma.$$

Diese Projektionen der Geschwindigkeit $\omega = \frac{de}{dt}$ auf die drei Axen werden auch ihre Komponenten nach diesen Axen genannt, und aus der Theorie der Projektionen folgt, daß die Geschwindigkeit $\omega$ die Diagonale des aus ihren drei Komponenten konstruirten rechtwinkligen Parallelepipedums ist. Man hat folglich:

$$\omega = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

oder:

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß, während sich der materielle Punkt mit einer Geschwindigkeit $\omega$, deren Richtung mit den drei Koordinatenaxen resp. die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bildet, fortbewegt, diese Axen selbst bei unveränderter Richtung, also auch der Anfangspunkt sich mit einer Geschwindigkeit U fortbewegen, deren Richtung mit diesen Axen resp. die Winkel $a$, $b$, $c$ bildet; so besteht z. B. die Gesammtbewegung des materiellen Punktes in dem Sinne der $x$ offenbar aus seiner Bewegung in diesem Sinne in Beziehung auf den beweglichen Anfangspunkt und aus der Bewegung dieses Anfangspunktes selbst in demselben Sinne und in Beziehung auf die festen Axen. Dasselbe gilt für die Richtung der $y$ und die der $z$, so daß die Komponenten der wirklichen Geschwindigkeit des beweglichen Punktes im Raume nach den drei Axen resp. ausgedrückt werden durch:

$$U \cos a + \omega \cos \alpha, \quad U \cos b + \omega \cos \beta, \quad U \cos c + \cos \gamma.$$

Nun seien MA und MB (Fig. 2) die Wege, welche der materielle Punkt M in der Sekunde beschreiben würde, wenn derselbe während dieser Zeit die eine, oder die andere der beiden Geschwindigkeiten U und $\omega$ beibehielte. Wir wollen AB′ gleich und parallel zu MB und dann MB′ ziehen, so ist:

$$U \cos a + \omega \cos \alpha$$

der Ausdruck der Projektion der gebrochenen Linie MAB′ auf die Axe der $x$ (§. 3) und nach der Theorie der Projektionen auch der Ausdruck der Projektion von MB′ auf dieselbe Axe. Ebenso sind:

$$U \cos b + \omega \cos \beta \quad \text{und} \quad U \cos c + \omega \cos \gamma$$

die Ausdrücke der Projektionen von MB′ auf die Axen der $y$ und der $z$. Diese gerade Linie MB′ würde also der bewegliche Punkt in der Sekunde durchlaufen, wenn er während dieser Zeit die gleichzeitigen Geschwindigkeiten U und ω hätte; d. h. wenn MA und MB diese gleichzeitigen Geschwindigkeiten ausdrücken, so drückt MB′ die sich daraus ergebende wirkliche Geschwindigkeit, oder die Resultante der Geschwindigkeiten U und ω, welche die Komponenten derselben genannt werden, aus.

Um diese Resultante zu erhalten, muß man also die beiden Komponenten U und ω wie die sie darstellenden Linien MA und AB′ aneinander setzen, und die Endpunkte der dadurch entstehenden gebrochenen Linie durch eine gerade Linie verbinden. Diese Resultante kann auch als die Diagonale des aus den Komponenten U und ω oder MA und MB konstruirten Parallelogrammes betrachtet werden.

Wenn der bewegliche Punkt drei gleichzeitige Geschwindigkeiten hätte, so ließe sich auf dieselbe Weise zeigen, daß die daraus resultirende Geschwindigkeit erhalten werden kann, wenn man die einzelnen Geschwindigkeiten MA, MB, MC bei unveränderten Richtungen so aneinander legt, daß sie eine gebrochene Linie MAB′C′ bilden, und dann die Endpunkte dieser gebrochenen Linie durch eine gerade Linie MC′ verbindet. Diese Resultante MC′ kann auch als die Diagonale des Parallelepipedums betrachtet werden, dessen Kanten die drei Geschwindigkeitskomponenten MA, MB, MC sind. Das von drei gleichzeitigen Geschwindigkeiten Gesagte gilt auch von einer beliebigen Anzahl solcher Geschwindigkeiten und die Resultante wird immer durch die gerade Linie ausgedrückt, welche die Endpunkte der gebrochenen Linie verbindet, die aus der Zusammensetzung der die Componenten darstellenden geraden Linien hervorgeht.

### Zusammensetzung der Kräfte.

§. 14. Diese Relation zwischen den einzelnen gleichzeitigen Geschwindigkeiten und der wirklichen Geschwindigkeit, oder zwischen den Geschwindigkeitskomponenten und ihrer Resultante findet auch, wie wir sogleich zeigen werden, zwischen den Kräften statt.

Wenn man die Krafteinheit durch eine gewisse Längeneinheit ausdrückt, so kann jede Kraft durch eine Länge dargestellt werden, welche die Längeneinheit ebenso vielmal enthält, als die Kraft Krafteinheiten oder Kilogramme, und wenn man diese Länge auf die Richtung der Kraft von ihrem Angriffspunkte aus trägt; so wird diese Kraft durch diese Länge sowohl der Intensität oder Stärke, als der Richtung nach dargestellt.

Wenn nun auf denselben materiellen Punkt, welchen wir zuvörderst als unbewegt oder ruhend betrachten wollen, gleichzeitig mehrere Kräfte wirken, so sieht man leicht ein, daß sich dieser Punkt unter der gleichzeitigen Wirkung dieser Kräfte doch immer nur nach einer einzigen Richtung bewegen kann, wie wenn nur eine einzige Kraft nach dieser Richtung auf ihn wirkte, und folglich kann das System der gleichzeitig wirkenden Kräfte immer durch eine einzige Kraft ersetzt werden, welche man die Resultante der gleichzeitig wirkenden Kräfte nennt, während diese die Komponenten der Resultante genannt werden. Wir wollen nun die Relationen aufsuchen, welche sowohl in Beziehung auf die Intensität oder Stärke, als in Beziehung auf die Richtung zwischen den Komponenten und ihrer Resultante statt finden.

§. 15. Zuerst wollen wir den sehr einfachen Fall betrachten, wo zwei gleiche Kräfte P und P′, welche der Größe und Richtung nach durch die Längen $mP$, $mP'$ (Fig. 3) dargestellt werden, auf denselben materiellen Punkt $m$ wirken, indem ihre Richtungen einen Winkel $\alpha$ mit einander bilden, welcher ein Drittel von vier rechten Winkeln beträgt.

Wenn man nun annimmt, daß auf denselben materiellen Punkt $m$ noch eine dritte Kraft $mP''$ wirkt, welche der Intensität nach, jeder der beiden ersten gleich ist, und deren Richtung mit den Richtungen dieser beiden ersten Kräfte einen Winkel $\alpha$ bildet; so ist wegen der Symmetrie der Figur einleuchtend, daß sich der materielle Punkt $m$ nicht bewegen kann, und daß folglich die beiden Kräfte P und P′ die Wirkung der Kraft P″ aufheben. Aber die Wirkung der Kraft P″ würde offenbar auch durch eine Kraft P‴ aufgehoben, welche ihr gleich und entgegengesetzt ist, woraus folgt, daß die beiden Kräfte P und P′ durch die eine Kraft P‴ vertreten werden können, welche mithin ihre Resultante ist.

Da diese Kraft P‴ nach der Verlängerung von P″ gerichtet ist, so theilt ihre Richtung den Winkel $\alpha$ in zwei gleiche Theile, wovon jeder 2/3 eines rechten beträgt, und da die geraden Linien $mP$, $mP'$, $mP''$ gleich lang sind; so sind die Dreiecke $PmP'''$, $P'mP'''$ gleichseitig, und bilden vereinigt eine Raute $PmP'P'''$. Die Resultante $mP'''$ der beiden Kräfte $mP$ und $mP'$ kann folglich erhalten werden, wenn man diese letztern nach ihren eigenen Richtungen zu der gebrochenen Linie $mP'P'''$ zusammensetzt und die Endpunkte derselben durch eine gerade Linie $mP'''$ verbindet. Diese Resultante kann auch als die Diagonale des aus den Komponenten $mP$, $mP'$ konstruirten Parallelogramms betrachtet werden.

Wir wollen nun zeigen, daß diese Relation allgemeine Gültigkeit hat, d. h.: daß die Resultante zweier beliebiger nach verschiedenen Richtungen gleichzeitig auf denselben materiellen Punkt wirkender Kräfte der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des Parallelogramms ausgedrückt wird, welches aus den die Komponenten darstellenden geraden Linien konstruirt ist.

Wenn dieser Satz für zwei gleiche Kräfte P und P′, deren Richtungen einen beliebigen Winkel $\alpha$ mit einander bilden, bewiesen ist; so findet derselbe auch für zwei beliebige andere gleiche Kräfte Q und Q′, deren Richtungen denselben Winkel $\alpha$ mit einander bilden, statt, d. h. die Resultanten dieser beiden Systeme gleicher Kräfte verhalten sich wie diese Kräfte. Die Richtung der Resultante fällt offenbar mit der Halbirungslinie des Winkels $\alpha$ zusammen, welchen die Richtungen der beiden Komponenten mit einander bilden, weil diese einander gleich sind und kein Grund vorhanden ist, warum sich die Resultante eher der einen, als der andern Komponente nähern sollte.

Nehmen wir nun zunächst an, daß die Kräfte **P** und **Q** ein gemeinschaftliches Maß **F** haben, welches in der ersten $p$ mal und in der zweiten $q$ mal enthalten ist, und setzen für jede der Kräfte **P**, **P′** des ersten Systemes $p$ Kräfte, wovon jede $=$ **F** ist und dieselbe Richtung hat als **P** und **P′**; so setzen sich die Kräfte **F** paarweise in eine einzige $r$ zusammen, welche nach der Halbirungslinie des Winkels $\alpha$ gerichtet ist, und die Gesammtresultante dieser einzelnen Resultanten, welche offenbar $r$ so vielmal enthält, als $p$ Einheiten hat, ist die Resultante der Kräfte **P**, **P′**. Ebenso ergibt sich, daß die Resultante der Kräfte **Q**, **Q′** die Partialresultante $r$ so vielmal enthält, als $q$ Einheiten hat, woraus folgt, daß sich die Resultanten der beiden Systeme **P**, **P′** und **Q**, **Q′** wie $p$ zu $q$, und folglich wie **P** zu **Q** verhalten, welcher Satz sich auch leicht auf den Fall der Inkommensurabilität der Kräfte **P** und **Q** erweitern läßt.

Man kann nun leicht zeigen, daß, wenn dieser Satz für zwei gleiche Kräfte **P** und **P′** (Fig. 4), deren Richtungen einen Winkel $\alpha$ miteinander bilden, stattfindet, derselbe auch für zwei gleiche Kräfte **P**, **P″** gilt, deren Richtungen einen halb so großen Winkel miteinander bilden. Was zunächst die Richtung der Resultante der Kräfte **P** und **P″** anlangt, so fällt sie offenbar mit der Halbirungslinie $m$**Q** des Winkels **P**$m$**P″** zusammen. Ferner wollen wir annehmen, daß nach $m$**P″** zwei gleiche Kräfte, jede $=$ **P″**, wirken, so wird ihre Resultante durch $2m$**P″** ausgedrückt, und die Resultante der beiden Kräfte **P**, **P′** wird durch $2m$**A** ausgedrückt; folglich wird die Resultante dieser vier Kräfte durch $2m$**P″** $+$ $2m$**A** ausgedrückt. Wenn man aber aus dem Punkte **B**, wo **PP″** die Richtung $m$**Q** trifft, ein Perpendikel **BA′** auf $m$**P″** fällt, so hat man $m$**A** $+$ $m$**P″** $=$ $2m$**A′**, und folglich wird die eben erwähnte Totalresultante ausgedrückt durch $4m$**A′**. Diese Resultante kann aber auch erhalten werden, wenn man successive die Resultante **Q** von **P**, **P″**, dann die Resultante **Q′** von **P′**, **P″** und endlich die Resultante von **Q** und **Q′** sucht. Nun bilden aber die Kräfte **Q** und **Q′** denselben Winkel miteinander, wie **P** und **P″** oder wie **P′** und **P″**, und wenn folglich $m$**B′** die Hälfte der Resultante von **P**, **P″** und $m$**B″** den vierten Theil der Resultanten von **Q**, **Q′** darstellt; so hat man nach dem eben Bewiesenen:

$$\frac{2mB'}{mP} = \frac{4mB''}{2mB'} \text{ oder } \frac{mB'}{mP} = \frac{mB''}{mB'},$$

woraus folgt, das die Dreiecke $B'mP$, $B''mB'$, welche einen gleichen Winkel bei $m$ haben, einander ähnlich sind. Aber die Linie $mB''$, welche den vierten Theil der Totalresultante ausdrückt, muß der Linie $mA'$, welche dieselbe Größe ausdrückt, gleich sein, und folglich muß der Punkt $B'$ mit dem Punkte $B$ zusammenfallen, so daß man alsdann statt der Dreiecke $B'mP$, $B''mB'$ die rechtwinkligen Dreiecke $BmP$, $A'mP$ hat. Die Resultante der Kräfte $P$, $P''$ muß folglich durch das Doppelte von $mB$, d. h. durch die Diagonale des aus $mP$ und $mP''$ construirten Parallelogrammes dargestellt werden.

Ebenso ergibt sich, daß der in Rede stehende Satz auch für zwei gleiche Kräfte gilt, welche einen der Winkel $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\cdots$ $\frac{\alpha}{2^n}$ mit einander bilden, wo der letzte beliebig klein gemacht werden kann.

Wir wollen nun beweisen, daß der in Rede stehende Satz, wenn derselbe für die Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\alpha+\beta$ statt findet, auch für den Winkel $\alpha+2\beta$ gilt, und zu dem Zwecke das System der auf den materiellen Punkt $m$ wirkenden vier gleichen Kräfte $P$, $P'$, $P_1$, $P'_1$ (Fig. 4[a]) betrachten. Es sei $P'mP'_1 = \alpha$, $PmP' = P_1mP_1' = \beta$ und $mQ$, $mQ_1$ seien die Halbirungslinien der Winkel $PmP'$, $P_1mP'_1$; so ist $QmQ_1 = \alpha+\beta$ und $PmP_1 = \alpha+2\beta$. Ferner wollen wir die Linie $PP'$, welche in $B$ auf $mB$ senkrecht ist, so wie die Linie $P'P'_1$ ziehen, auf letztere das Perpendikel $mP'''$ und aus den Punkten $P$, $B$ auf $m\,P'''$ die Perpendikel $PA$, $BA'$ fällen; so ist $2mP'''$ die Resultante der beiden gleichen Kräfte $P'$, $P'_1$, welche den Winkel $\alpha$ mit einander bilden, und $2mB$ ist die Resultante der beiden gleichen Kräfte $P$, $P'$, oder $P_1$, $P'_1$ welche den Winkel $\beta$ mit einander bilden. Wir wollen diese beiden letzten Resultanten resp. mit $Q$ und $Q_1$ bezeichnen, so ist $4mA'$ die Resultante aus $Q$ und $Q_1$, welche den Winkel $\alpha+\beta$ miteinander bilden. Da aber diese letztere Resultante die Gesammtresultante sein muß, so ist sie der Resultante aus $P'$, $P'_1$ und der aus $P$, $P_1$ zusammengenommen gleich, woraus folgt, daß die Resultante der Kräfte $P$, $P_1$, welche den Winkel $\alpha+2\beta$ mit einander bilden, gleich $4mA'-2mP'''$, d. h. $=mA$ ist, weil die Summe $mA+mP'''=2mA'$ ist.

Da hiernach der in Rede stehende Satz für die Winkel $0$, $\frac{\alpha}{2^n}$, $\frac{2\alpha}{2^n}$ wahr ist, so ist er es auch für die Winkel $\frac{3\alpha}{2^n}$, $\frac{4\alpha}{2^n}$, $\frac{5\alpha}{2^n}$, $\cdots$ $\frac{m\alpha}{2^n}$, d. h. für jeden beliebigen Winkel, weil $\frac{m\alpha}{2^n}$ offenbar jeden beliebigen Winkel ausdrücken kann.

Wir können nun zeigen, daß der fragliche Satz auch für zwei beliebige ungleiche Kräfte P, P′ (Fig. 5), welche einen rechten Winkel mit einander bilden, statt findet. Zu dem Zwecke wollen wir die beiden Diagonalen des aus den Kräften *m*P, *m*P′ konstruirten Rechteckes ziehen, und aus der Mitte B auf *m*P, *m*P′ resp. die Perpendikel BA, BA′ fällen, durch den Punkt *m* eine Parallele zu PP′ ziehen, und auf derselben *m*B′ = *m*B″ = *m*B nehmen; so sieht man leicht ein, daß *m*P die Diagonale der unvollendeten Raute *m*BPB″ ist, und daß folglich die durch *m*P ausgedrückte Kraft als die Resultante der beiden durch *m*B und *m*B″ dargestellten gleichen Kräfte betrachtet werden kann. Ebenso kann die Kraft *m*P′ als die Resultante aus *m*B und *m*B′ betrachtet werden. Die beiden Kräfte *m*P, *m*P′ können folglich durch vier Kräfte ersetzt werden, nämlich 1) durch die beiden Kräfte *m*B′, *m*B″ welche einander gleich und entgegengesetzt sind, folglich einander aufheben, und 2) durch zwei Kräfte, wovon jede durch *m*B ausgedrückt wird, und mithin einer einzigen Kraft gleich sind, welche durch *m*Q, d. h. durch die Diagonale des aus *m*P und *m*P′ konstruirten Rechteckes dargestellt wird.

Endlich läßt sich leicht zeigen, daß der in Rede stehende Satz auch für zwei ungleiche Kräfte gilt, welche einen beliebigen Winkel mit einander bilden. Denn es seien *m*P, *m*P′ (Fig. 6) die geraden Linien, welche diese beiden Kräfte ausdrücken; man konstruire das Parallelogramm *m*PQP′, ziehe B*m*B′ senkrecht auf die Diagonale *m*Q, fälle aus den Punkten P, P′ auf *m*Q die Perpendikel PA, P′A′ und ziehe zu dieser Diagonale die Parallelen PB, P′B′; so kann man nach dem vorhin Bewiesenen *m*P als die Resultante aus *m*A und *m*B, und ebenso *m*P′ als die Resultante aus *m*A′ und *m*B′ betrachten. Da aber die Kräfte *m*B und *m*B′ einander gleich und entgegengesetzt sind, also einander aufheben; so können sie unberücksichtigt bleiben, und es bleiben nur noch die beiden Kräfte *m*A, *m*A′ übrig, deren Resultante ihrer Summe gleich ist, d. h. durch die Diagonale *m*Q des aus *m*P und *m*P′ konstruirten Parallelogrammes ausgedrückt wird, weil *m*A′ = AQ ist.

Wenn also auf denselben materiellen Punkt zwei beliebige Kräfte wirken, welche der Größe und Richtung nach durch gerade Linien ausgedrückt werden; so wird die Resultante dieser Kräfte immer der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des aus diesen Linien konstruirten Parallelogramms dargestellt. Mit andern Worten: man erhält diese Resultante, wenn man die beiden geraden Linien in den Richtungen der durch sie dargestellten Kräfte aneinander legt, und die Endpunkte der dadurch entstehenden gebrochenen Linie durch eine dritte gerade Linie verbindet.

Wenn man eine größere Anzahl auf denselben materiellen Punkt wirkender Kräfte in eine einzige zusammen zu setzen hätte, so könnte man zuerst nach der vorhergehenden Regel zwei dieser Kräfte zu einer Resultante, dann diese Resultante mit einer dritten der gegebenen Kräfte, u. s. f. zusammensetzen, was offenbar darauf hinausläuft, die diese Kräfte darstellenden geraden Linien nach den entsprechenden Richtungen mit ihren Endpunkten aneinander zu legen, und dann die Endpunkte der auf diese Weise erhaltenen gebrochenen Linie durch eine gerade Linie zu verbinden, welche alsdann die gesuchte Resultante der Größe und Richtung darstellt.

§. 16. Aus dieser Regel und der bekannten Theorie der Projektionen folgt, daß die Projektion der Resultante aus einer beliebigen Anzahl von Kräften auf eine beliebige Axe der Summe der Projektionen ihrer Komponenten auf dieselbe Axe gleich ist, indem man die Projektionen der Kräfte als negativ betrachtet, welche mit der Richtung der Projektion der Resultante, die man als die der positiven Projektionen betrachtet, einen stumpfen Winkel bilden.

Aus der Zusammensetzung der Kräfte ergibt sich auch als besonderer Fall, daß man für jede Kraft drei andere nach aufeinander senkrechten Axen gerichtete Kräfte, welche den Projektionen der ursprünglichen Kraft auf diese drei Axen gleich sind, substituiren kann, was in der Mechanik sehr häufig geschieht.

Sehr oft hat man auch eine gegebene Kraft in drei andere zu zerlegen, wovon die eine nach einer gegebenen geraden Linie wirkt. Diese Zerlegung kann auf unendlich viele verschiedene Arten geschehen, wenn die Winkel, welche die Komponenten mit einander bilden, willkürlich bleiben; aber es findet nur eine einzige Zerlegungsart statt, wenn die drei Komponenten aufeinander senkrecht sein müssen. Man versteht daher in der Mechanik unter der Zerlegung oder Komponente einer Kraft $Q$ nach einer geraden Linie $mP$ gewöhnlich die Kraft, welche mit zwei andern unter sich und auf den ersten senkrechten Kräften zusammengesetzt, die Kraft $Q$ zur Resultante gibt, und diese Komponente ist nichts anders, als die Projektion der die Kraft $Q$ darstellenden geraden Linie auf die gerade Linie $mP$.

Oft zerlegt man eine gegebene Kraft auch in zwei andere, wovon die eine nach einer geraden Linie $mP$ gerichtet und die andere darauf senkrecht ist, und es wird in diesem Falle angenommen, daß die gegebene Kraft und ihre beiden Komponenten in derselben Ebene liegen. Endlich haben wir bei der Ableitung der Sätze über die Zusammensetzung der Kräfte angenommen, daß sich der materielle Punkt, auf welchen diese Kräfte wirken, in Ruhe befindet; allein die bewiesenen Sätze würden auch noch statt finden, wenn sich dieser materielle Punkt in Bewegung befände; denn es ist eine Erfahrungswahrheit, daß die Kräfte auf einen in Bewegung befindlichen Körper eben so wirken, wie auf einen ruhenden, und folglich sind die Gesetze der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in beiden Fällen dieselben.

### Gleichungen für die krummlinige Bewegung.

§. 17. Wenn sich ein materieller Punkt bewegt, und seine Geschwindigkeit ändert sich der Größe, aber nicht der Richtung nach; so haben wir gesehen, daß diese Veränderung wegen der Trägheit der Materie nicht ohne die Einwirkung einer nach der Richtung der Bewegung des materiellen Punktes thätigen Kraft statt finden kann, und wenn die Geschwindigkeit ihre Richtung ändert, gleichviel ob sich ihre Größe auch ändert, oder nicht; so kann man ebenso behaupten, daß diese Veränderung von einer Kraft herrührt, welche nach einer von der Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit des materiellen Punktes verschiedenen Richtung wirkt.

Um die Relation zu finden, welche zwischen dieser Kraft und der von ihr hervorgebrachten nothwendig krummlinigen Bewegung statt findet, werden wir uns wieder auf den Erfahrungssatz berufen: daß die Wirkung einer Kraft auf einen sich mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegenden Körper dieselbe ist, als wenn sich dieser Körper in Ruhe befindet, d. h. für einen Beobachter, welcher sich mit der Geschwindigkeit des Körpers in dem Augenblicke, wo die Kraft auf denselben wirken soll, in demselben Sinne, wie dieser Körper bewegt, würde letzterer in Folge der Wirkung dieser Kraft sich so zu bewegen scheinen, als wenn er von der Ruhe ausginge.

Wir wollen nun annehmen, daß die rechtwinkligen Koordinatenaren dieselben Richtungen behalten, aber daß sich der Anfangspunkt derselben mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche der des Körpers in dem Augenblicke, wo die Kraft auf ihn wirken soll, gleich und parallel ist, und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ seien die Winkel, welche die Richtung der Kraft **F** mit diesen Aren bildet. Diese Kraft kann während des unendlich kleinen Zeittheilchens $dt$ als konstant betrachtet werden, und dasselbe gilt von ihren Komponenten:

$$\mathbf{F}\cos\alpha,\quad \mathbf{F}\cos\beta,\quad \mathbf{F}\cos\gamma.$$

Die Komponenten der scheinbaren oder relativen Geschwindigkeit, welche dem materiellen Punkte während des Zeitelementes $dt$ mitgetheilt wird, werden folglich ausgedrückt durch (§. 10):

$$g\,\frac{\mathbf{F}\cos\alpha}{p}\,dt,\; g\,\frac{\mathbf{F}\cos\beta}{p}\,dt,\; g\,\frac{\mathbf{F}\cos\gamma}{p}\,dt.$$

Aber die Geschwindigkeit, welche die Kraft **F** dem materiellen Punkte mittheilen würde, wenn sich derselbe in Ruhe befände, coeristirt nach dem erwähnten Erfahrungssatze mit der bereits erlangten Geschwindigkeit des materiellen Punktes, so daß sich ihre Komponenten zusammenaddiren (§. 13), und da die zuletzt ausgedrückten Komponenten sich auf die unendlich kleine Zeit $dt$ beziehen; so sind sie die Differenziale der andern Komponenten in Beziehung auf die Zeit $t$. Wenn folglich $u$, $v$, $w$ die nach den Koordinatenaxen gerichteten Komponenten der Geschwindigkeit des materiellen Punktes in dem Augenblicke, wo die Kraft F auf ihn wirken will, bezeichnen; so hat man:

$$\text{(A)} \qquad du = g.\frac{F\cos\alpha}{p}dt,\ dv = g.\frac{F\cos\beta}{p}dt,\ \ dw = g.\frac{F\cos\gamma}{p}dt,$$

oder:

$$\frac{du}{dt} = g\frac{F\cos\alpha}{p},\quad \frac{dv}{dt} = g\frac{F\cos\beta}{p},\quad \frac{dw}{dt} = g\frac{F\cos\gamma}{p}.$$

Wenn man diese Gleichungen mit der in §. 10 vergleicht, so folgt, daß die Projektion der Beschleunigung der Geschwindigkeit nach der Richtung jeder Axe während der unendlich kleinen Zeit $dt$ als diejenige betrachtet werden kann, welche der materielle Punkt der sich nach dieser Axe bereits mit der Komponente seiner Geschwindigkeit im Raume fortbewegt, annehmen würde, wenn die Komponente der Kraft F nach dieser Axe nun auf ihn wirkte.

In den Gleichungen (A) sind alle Gesetze der Bewegung eines materiellen Punktes enthalten, auf welchen eine Kraft wirkt, die eine von der Richtung der bereits erlangten Geschwindigkeit des materiellen Punktes verschiedene Richtung hat, d. h. alle Gesetze der krummlinigen Bewegung eines materiellen Punktes.

### Bewegung schwerer Körper im leeren Raume.

§. 18. Wir wollen diese Gleichungen auf die Bestimmung der Bewegung schwerer Körper im leeren Raume unter der alleinigen Wirkung der Schwere anwenden. Wenn wir die Axe der $z$ vertikal annehmen, und die $z$ von unten nach oben zählen, so verwandeln sich die Gleichungen (A) wegen $F = p$ in folgende:

$$\frac{du}{dt} = 0,\quad \frac{dv}{dt} = 0,\quad \frac{dw}{dt} = -g.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration, wenn $u_0$, $v_0$, $w_0$ die Komponenten der anfänglichen Geschwindigkeit bezeichnen:

$$u = u_0,\quad v = v_0,\quad w = w_0 - gt,$$

oder:

$$\frac{dx}{dt} = u_0,\quad \frac{dy}{dt} = v_0,\quad \frac{dz}{dt} = w_0 - gt.$$

Wenn man die anfängliche Lage des materiellen Punktes, welche $t=0$ oder dem Augenblicke entspricht, von welchem aus die Zeit $t$ gezählt wird, zum Anfangspunkte der festen Koordinaten $x, y, z$ nimmt, so ergibt sich durch eine neue Integration:

$$x=u_0 t, \quad y=v_0 t, \quad z=w_0 t-g\frac{t^2}{2}.$$

und wenn man $t$ zwischen diesen drei Gleichungen eliminirt; so erhält man:

$$y=\frac{v_0}{u_0}x; \quad z=\frac{w_0}{u_0}x-\frac{g}{2u_0^2}x^2.$$

Die erste dieser letzten Gleichungen ist die einer Vertikal-Ebene, worin die Bewegung statt findet, und wenn man diese ebene zu der Ebene der $xz$ nimmt, oder $v_0=0$ setzt; so ist die zweite Gleichung die der Curve, welche der materielle Punkt in dieser Ebene beschreibt, im Allgemeinen die Trajektorie desselben genannt wird und in dem gegenwärtigen Falle offenbar eine Parabel ist, deren Axe vertikal steht.

Das Maximum von $z$ ist $=\frac{w_0^2}{2g}$ und entspricht $x=\frac{u_0 w_0}{g}$, welches genau die Koordinaten des Scheitels der Parabel sind, und man sieht, daß die größte Höhe, bis zu welcher der materielle Punkt aufsteigt, genau diejenige ist, welche er erreichen würde, wenn er mit der anfänglichen Geschwindigkeit $w_0$ aufwärts geworfen würde. Die Trajektorie geht durch den Anfangspunkt der Koordinaten und durchschneidet die Axe der $x$ in einem zweiten Punkte, dessen Abscisse $=\frac{2u_0 w_0}{g}$, d. h. das Doppelte der Abscisse des Scheitels der Curve ist, und die Wurfweite genannt wird.

Wenn $\alpha$ der Winkel, welchen die anfängliche Geschwindigkeit des materiellen Punktes mit der Axe der $x$ bildet, und $V_0$ diese Geschwindigkeit selbst bezeichnet; so hat man:

$$u_0=V_0\cos\alpha \text{ und } w_0=V_0\sin\alpha,$$

woraus folgt, daß die Wurfweite ausgedrückt wird durch:

$$\frac{2V_0\sin\alpha\cos\alpha}{g} \text{ oder } \frac{V_0\sin 2\alpha}{g}$$

und die größte Wurfweite bei unveränderter anfänglicher Geschwindigkeit $V_0$ entspricht folglich $2\alpha=90^0$ oder $\alpha=45^0$.

**Ausdruck der Tangential- und Normalkomponenten der bewegenden Kraft.**

§. 19. Wenn man die Kraft **F**, welche die Bewegung des Körpers verändert in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung in zwei andere zerlegt, wovon die eine nach der Richtung der Geschwindigkeit, d. h. nach der Tangente an der Trajektorie und die andere nach einer darauf senkrechten oder in der Normalebene dieser Kurve liegenden Richtung wirkt; so erhält man zwei Komponenten, welche zu den Elementen der Bewegung des Körpers, d. h. zu seinem Gewichte und zu den Größen, welche die Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit ausdrücken, in sehr einfachen Beziehungen stehen.

Um diese Relationen zu erhalten, wollen wir die Gleichungen (A) in §. 17 mit $\frac{p}{g}$ multipliciren, damit sie nicht mehr Gleichheiten zwischen Längen, welche Geschwindigkeitszunahmen messen, ausdrücken, sondern Gleichheiten zwischen Kräften, welche in Kilogrammen ausgedrückt sind. Hierdurch ergibt sich:

$$\frac{p}{g}\frac{du}{dt}=\mathbf{F}\cos\alpha,\ \frac{p}{g}\frac{dv}{dt}=\mathbf{F}\cos\beta,\ \frac{p}{g}\frac{dw}{dt}=\mathbf{F}\cos\gamma.$$

Wenn $\omega$ die Geschwindigkeit des materiellen Punktes und $ds$ den in dem Zeitelemente $dt$ beschriebenen unendlich kleinen Kurvenbogen bezeichnet; so hat man:

$$\omega=\frac{ds}{dt},$$

und zu gleicher Zeit:

$$u=\frac{dx}{ds}\omega,\quad v=\frac{dy}{ds}\omega,\quad w=\frac{dz}{ds}\omega,$$

weil $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Kosinus der Winkel sind, welche die Richtung des Elementes $ds$ oder die der Geschwindigkeit $\omega$ mit den Koordinatenaxen bildet. Substituirt man diese Werthe in die obigen Gleichungen und entwickelt die Ausdrücke von $du$, $dv$, $dw$ nach den Regeln der Differenzialrechnung, so findet man:

$$\frac{p}{g}\frac{dx}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt}\omega=\mathbf{F}\cos\alpha,$$

$$\frac{p}{g}\frac{dy}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dt}\omega=\mathbf{F}\cos\beta,$$

$$\frac{p}{g}\frac{dz}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dt}\omega=\mathrm{F}\cos\gamma,$$

oder wenn man $dt$ vermöge der Relation $\omega=\frac{ds}{dt}$ aus den zweiten Gliedern der ersten Theile dieser letzten Gleichungen eliminirt:

$$\frac{p}{g}\frac{dx}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\omega^2=\mathrm{F}\cos\alpha,$$

$$\frac{p}{g}\frac{dy}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\omega^2=\mathrm{F}\cos\beta,$$

$$\frac{p}{g}\frac{dz}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\omega^2=\mathrm{F}\cos\gamma.$$

Wenn $a$, $b$, $c$ die Winkel bezeichnen, welche die Geschwindigkeit $\omega$ oder das Kurvenelement $ds$ oder endlich die Tangente der Trajektorie mit den Koordinatenaxen bildet, so hat man:

$$\frac{dx}{ds}=\cos a,\quad \frac{dy}{ds}=\cos b,\quad \frac{dz}{ds}=\cos c.$$

Denkt man sich nun durch den Anfangspunkt der Koordinaten eine gerade Linie, welche sich so um diesen Punkt drehet, daß sie beständig zu der Geschwindigkeit des materiellen Punktes oder zu der Tangente der von demselben beschriebenen Kurve parallel ist; so sind die Koordinaten eines in der Entfernung $r$ auf dieser geraden Linie vom Anfangspunkte liegenden Punktes resp.:

$$r\cos a,\quad r\cos b,\quad r\cos c,$$

und wenn man $r=1$ setzt, so sind diese Koordinaten offenbar:

$$\cos a,\ \cos b,\ \cos c,\ \text{oder}\ \frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}.$$

Dieser geometrische Punkt beschreibt in der unendlich kleinen Zeit $dt$ einen unendlich kleinen Bogen $d\psi$, welcher mit den beiden successiven Lagen der zu der Tangente parallelen geraden Linie eine Ebene bestimmt, die zu der Ebene parallel ist, worin die beiden successiven Tangenten der von dem beweglichen Punkte beschriebenen Kurve liegen, und welche die Oskulations- oder Krümmungsebene genannt wird, und außerdem kann der

Bogen $d\psi$ als auf den geraden Linien senkrecht betrachtet werden, welche durch den Anfangspunkt parallel zu den beiden aufeinander folgenden Tangenten gezogen sind.

Da die Projektionen des Bogens $d\psi$ auf die Koordinatenaxen nichts anders sind, als die unendlich kleinen Zuwächse der Koordinaten $\cos. a$, $\cos. b$, $\cos. c$ des Punktes, welcher diesen Bogen beschreibt; so werden sie offenbar ausgedrückt durch:

$$d.(\cos a), \quad d.(\cos b), \quad d.(\cos c),$$

oder:

$$d.\left(\frac{dx}{ds}\right), \quad d.\left(\frac{dy}{ds}\right), \quad d.\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Bezeichnen also $l, m, n$ die Winkel, welche dieser Bogen $d\psi$, d. h. die in der Krümmungsebene liegende Normale der Curve mit den Koordinatenaxen bildet, und man betrachtet diesen Bogen als von der ersten Tangente gegen die zweite gerichtet*), so hat man:

$$d.\left(\frac{dx}{ds}\right) = \cos l . d\psi, \; d.\left(\frac{dy}{ds}\right) = \cos m . d\psi, \; d.\left(\frac{dz}{ds}\right) = \cos n . d\psi.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen, und setzt in den ersten Gliedern resp. $\cos. a$, $\cos. b$, $\cos. c$ für die Verhältnisse $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; so kommt:

$$\frac{p}{g}\frac{d\omega}{dt}.\cos a + \frac{p\omega^2}{g}\frac{d\psi}{ds}\cos l = \mathrm{F}\cos\alpha,$$

$$\frac{p}{g}\frac{d\omega}{dt}.\cos b + \frac{p\omega^2}{g}\frac{d\psi}{ds}\cos m = \mathrm{F}\cos\beta,$$

$$\frac{p}{g}\frac{d\omega}{dt}.\cos c + \frac{p\omega^2}{g}\frac{d\psi}{ds}\cos n = \mathrm{F}\cos\gamma,$$

und wenn man sich zwei Kräfte:

$$\mathrm{P} = \frac{p}{g}.\frac{d\omega}{dt} \text{ und } \mathrm{Q} = \frac{p\omega^2}{g}\frac{d\psi}{ds}$$

denkt, so nehmen die letzten Gleichungen folgende Form an:

---

*) Wenn nämlich MT, TM' (Fig. 7 und 8) die beiden successiven Tangenten, O$m$, O$m'$ die durch den Anfangspunkt gehenden Parallelen zu denselben, und $mm'$ der Bogen $d\psi$ sind: so muß dieser Bogen immer von der ersten Tangente gegen die zweite oder von der ersten Parallele O$m$ gegen die zweite O$m'$ d. h. von $m$ gegen $m'$ gezählt werden.

$$P \cos a + Q \cos l = F \cos \alpha,$$
$$P \cos b + Q \cos m = F \cos \beta,$$
$$P \cos c + Q \cos n = F \cos \gamma.$$

Aus diesen Gleichungen folgt offenbar; daß die Kraft **F**, welche die Bewegung des Körpers oder des materiellen Punktes hervorbringt, als die Resultante (§. 16) der beiden Kräfte **P** und **Q** betrachtet werden kann, wovon die eine mit den Koordinatenaxen die Winkel $a$, $b$, $c$ bildet, also nach der Tangente der Trajektorie gerichtet ist und in dem Sinne der Geschwindigkeitszunahme $d\omega$ wirkt, während die andere **Q** die Winkel $l$, $m$, $n$ mit den Koordinatenaxen bildet, und folglich nach dem weiter oben Gesagten nach der in der Krümmungsebene auf der konkaven Seite der Kurve gezogenen Normale der Trajektorie gerichtet ist. Diese beiden Kräfte werden resp. die Tangential- und Normalkomponenten der bewegenden Kraft genannt, und man kann sich immer vorstellen, daß die Bewegung des materiellen Punktes durch die gleichzeitige Wirkung dieser beiden Kräfte hervorgebracht wird.

Die in dem Ausdrucke der Normalkomponente vorkommende Größe $\frac{d\psi}{ds}$ wird die Krümmung genannt, und es läßt sich leicht zeigen, daß $\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}$ ist, wenn $\rho$ den Krümmungshalbmesser bezeichnet *). Man kann also sagen: daß die Normalkomponente der bewegenden Kraft, wenn sie während einer Sekunde bei unveränderter Richtung und Intensität auf den materiellen Punkt wirkte, demselben einen Geschwindigkeitszuwachs ertheilen würde, welcher dem Produkte aus dem Quadrate der Geschwindigkeit $\omega$ und aus der Krümmung $\frac{d\psi}{ds}$ oder den Quotienten aus dem Quadrate der Geschwindigkeit $\omega$ und dem Krümmungshalbmesser gleich ist.

Da das Gewicht $p$ des Körpers oder materiellen Punktes in Kilogrammen ausgedrückt ist, und $\omega$, $g$, $\rho$ Längen ausdrücken, welche auf dieselbe Einheit, das Meter, bezogen werden, so drückt

---

*) Denn es seien $MM' = ds$, $mm' = d\psi$ (Fig. 9), $MC$, $M'C$ zwei successive Normalen und $Om$, $Om'$ zwei durch den Anfangspunkt $O$ zu den diesen Normalen entsprechenden Tangenten gezogenen Parallelen, welche auf diesen Normalen senkrecht sind, und $MC = M'C$, so daß die beiden Bogen $ds$, $d\psi$ als zwei ähnliche Kreisbogen betrachtet werden können; so hat man $MM' : mm' = MC : Om$. Da aber $MC = \rho$ der Krümmungshalbmesser und $Om = 1$ ist, so hat man;

$$ds : d\psi = \rho : 1, \quad \text{folglich} \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}.$$

$p\,\frac{\omega^2}{g\varrho}$ offenbar der Werth den Normalkomponente der bewegenden Kraft in Kilogrammen aus.

Was die Tangentialkraft anlangt, so würde sie, wenn sie während einer Sekunde bei unveränderter Intensität und Richtung auf den materiellen Punkt wirkte, demselben einen Geschwindigkeitszuwachs $= \frac{d\omega}{dt}$ ertheilen, d. h. die Größe der Geschwindigkeit genau um ebensoviel verändern, wie wenn die Bewegung geradlinig wäre (§. 10).

§. 20. Man kann die Ausdrücke der Tangential- und Normalkomponenten **P**, **Q** der bewegenden Kraft auch noch auf eine andere Weise erhalten. Denn nach §. 17 übt eine Kraft auf einen in Bewegung befindlichen Körper dieselbe Wirkung aus, wie auf denselben ruhenden Körper, und wenn sich ein Körper unter der Wirkung mehrerer Kräfte bewegt; so wirkt jede derselben unabhängig von den übrigen, und ertheilt dem Körper in ihrer eigenen Richtung dieselbe Geschwindigkeitszunahme, als wenn sie allein wirkte. Hieraus und aus der Regel für die Zusammensetzung der Kräfte (§. 14) ergibt sich leicht, daß, wenn zwei Kräfte **P** und **Q** während der sehr kleinen Zeit $dt$ auf einen in Bewegung befindlichen materiellen Punkt wirken, so daß sie während dieser Zeit $dt$ als konstant betrachtet werden können, jede dieser beiden Kräfte dem materiellen Punkte in ihrer eigenen Richtung eine Geschwindigkeitszunahme ertheilt, welche der Dauer $dt$ ihrer Wirkung und ihrer Intensität proportional ist (§. 16), und die wirkliche Verrückung des materiellen Punktes am Ende der Zeit $dt$ wird durch die dritte Seite eines Dreieckes ausgedrückt, dessen beide andern Seiten die Verrückungen oder Bewegungen ausdrücken, welche dieser materielle Punkt in der Richtung jeder der Kräfte **P**, **Q** erfahren haben würde, wenn sie während derselben Zeit einzeln auf denselben gewirkt hätten.

Da die Tangentialkraft **P** in dem Zeitintervalle $dt$ ihre Richtung nur unendlich wenig ändert, so wirkt sie wie bei der geradlinigen Bewegung, und erzeugt demnach in ihrer Richtung einen Geschwindigkeitszuwachs $d\omega$, welcher der Relation genügt:

$$\frac{p}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}=\mathbf{P}.$$

Da die Normalkomponente **Q** während der unendlich kleinen Zeit $dt$ ihrer Richtung und Intensität nach ebenfalls als konstant betrachtet werden kann, und der materielle Punkt in dieser Richtung keine anfängliche Geschwindigkeit hat, weil sie auf der Trajektorie senkrecht ist; so wird die Bewegung $d\varepsilon$ dieses Punktes in der Richtung der Kraft **Q** durch die Relation:

$$d\varepsilon = g.\frac{Q}{p}\frac{dt^2}{2}$$

gegeben (§. 11). Da man aber für den Bogen $ds$ seine Sehne nehmen kann, welche die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser $2\rho$ des Krümmungskreises und dem Abschnitte $d\varepsilon$ desselben ist; so hat man:

$$ds^2 = 2\rho . d\varepsilon,$$

und wenn man $d\varepsilon$ zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt, so erhält man:

$$\frac{ds^2}{2\rho} = g\frac{Q}{p}\frac{dt^2}{2},$$

folglich:

$$Q = \frac{p}{g}\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \frac{p}{g}\frac{\omega^2}{\rho},$$

welches derselbe Werth ist, wie der vorhergehende.

Zuweilen gibt man dem Ausdrucke der Normalkomponente eine andere Form, indem man den Bogen $d\psi$, oder den von zwei aufeinander folgenden Tangenten gebildeten Winkel darin beibehält, und die Relationen:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad \omega = \frac{ds}{dt}, \quad Q = \frac{p}{g}\frac{\omega^2}{\rho}$$

geben zu diesem Zwecke sofort:

$$Q = \frac{p}{g}.\omega\frac{d\psi}{dt}.$$

Wenn man sich wie im §. 19 durch einen festen Punkt eine gerade Linie gezogen denkt, welche sich um diesen Punkt so drehet, daß sie beständig zu der Richtung der Geschwindigkeit $\omega$, d. h. zu der Tangente der von dem materiellen Punkte beschriebenen Kurve parallel ist, und man nimmt auf dieser geraden Linie einen Punkt, welcher von dem festen Punkte um die Längeneinheit entfernt ist; so beschreibt dieser Punkt in der Zeit $dt$ einen kleinen Bogen $d\psi$ und seine Geschwindigkeit wird folglich durch $\frac{d\psi}{dt}$ ausgedrückt. Man kann diese Größe die Rotations- oder Winkelgeschwindigkeit der Tangente oder der Geschwindigkeit $\omega$ nennen, und vermittelst dieser Größe läßt sich die Normalkraft Q leicht ausdrücken, weil, wenn diese Kraft bei unveränderter Richtung und Intensität während einer Sekunde auf den materiellen Punkt wirkte, sie demselben eine Geschwindigkeitszunahme ertheilen würde, welche dem Produkte aus der Geschwindigkeit $\omega$ und der Winkelgeschwindigkeit derselben gleich wäre.

Während die aufeinander senkrechten Komponenten $\frac{p}{g}\frac{d\omega}{dt}$ und $\frac{p}{g}\frac{\omega^2}{\rho}$ resp die Tangial- und Normalkraft genannt werden, wird die Kraft F, welche ihre Resultante ist, und immer die Resultante aus allen auf den beweglichen materiellen Punkt wirkenden Kräfte sein muß, die Totalkraft genannt.

### Bewegung eines materiellen Punktes nach einer gegebenen Kurve.

§. 21. Wir wollen uns hier bei den Anwendungen der vorhergehenden Formeln auf die Bestimmung der Bewegung eines Körpers oder materiellen Punktes, auf welchen eine gegebene Kraft wirkt, nicht aufhalten, weil diese Aufgabe in der technischen Mechanik, welche den speciellen Gegenstand des vorliegenden Werkes bildet, wenig Anwendung findet, und wir wollen uns daher blos mit der Aufgabe beschäftigen: die Bewegung eines sich nach einer gegebenen Kurve bewegenden materiellen Punktes, und namentlich den Druck, welchen derselbe gegen diese Kurve ausübt, zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst einen Erfahrungssatz in Erinnerung bringen, welcher sich auf die gegenseitige Einwirkung zweier einander berührender Körper bezieht, und gewöhnlich dadurch kurz ausgedrückt wird, daß man sagt: die Wirkung sei der Gegenwirkung gleich und entgegengesetzt; aber darin besteht, daß, wenn einer von zwei einander berührenden Körpern nach einer gewissen Richtung auf den andern einen Druck oder eine Kraft F ausübt, dieser zweite Körper auf den ersten nach einer gerade entgegengesetzten Richtung denselben Druck oder dieselbe Kraft ausübt.

Dieser Satz bildet gewissermaßen die Grundlage der ganzen technischen Mechanik; denn derselbe kommt überall da zur Anwendung, wo man nicht blos die Bewegung eines einzelnen Körpers, sondern die zweier oder mehrerer mit einander in Berührung stehender Körper betrachtet. Dieser Grundsatz kann nicht blos direkt durch das Experiment als richtig dargethan werden, sondern derselbe wird auch indirekt dadurch bestätigt, daß die beobachteten Erscheinungen mit den Gesetzen übereinstimmen, welche aus den auf diesem Grundsatze beruhenden Theorien abgeleitet werden.

Wir wollen nun sehen, wie man mit Hülfe dieses Grundsatzes den Druck bestimmen kann, welchen ein sich längs einer Kurve bewegender materieller Punkt auf diese Kurve ausübt. Es bezeichne F die jeden Augenblick auf diesen materiellen Punkt wirkende Kraft, so würde, da sie im Allgemeinen nicht nach der Richtung der Tangente der zu beschreibenden Kurve wirkt, wenn sie allein auf den materiellen Punkt wirkte, derselbe auch eine andere Bahn oder Trajektorie beschreiben. Allein der Druck, welchen die gegebene Kurve auf den materiellen Punkt ausübt, kann als eine zweite Kraft betrachtet werden, welche mit der ersten zusammengesetzt, eine Resultante **R** gibt, durch welche die Bewegung des materiellen Punktes hervorgebracht wird. Diese Kraft **R** muß folglich so beschaffen sein, daß ihre Normalkomponente durch:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\rho}$$

ausgedrückt wird, wo $\omega$ die Geschwindigkeit des materiellen Punktes auf der gegebenen Kurve und $\rho$ den Krümmungshalbmesser dieser Kurve bezeichnet.

Betrachten wir zunächst den Fall, wo die gegebene Kurve eben ist und die Kraft **F** in der Ebene dieser Kurve wirkt; so nähert sich die Richtung, nach welcher der Widerstand der Kurve auf den materiellen Punkt wirkt, der Richtung der Normale dieser Kurve um so mehr, je geringer die Reibung ist, und wir wollen daher bei diesen theoretischen Betrachtungen annehmen, daß diese Reibung völlig Null, oder daß die Wirkung der Kurve auf den materiellen Punkt genau nach der Normale gerichtet sei. Wir wollen diese Kraft mit **N** bezeichnen, so liegt dieselbe, wie die Wirkung der Kurve auf den materiellen Punkt in der Ebene dieser Kurve, und die Wirkung des materiellen Punktes auf die Kurve, oder der auf diese Kurve ausgeübte Druck ist der Kraft **N** gleich und entgegengesetzt. Die Normalkomponente der Totalkraft **R** besteht aus der Kraft **N** und der Normalkomponente der Kraft **F**, so daß **N** die Differenz zwischen der Normalkomponente von $R = \frac{p}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\rho}$ und der von **F** ist.

Wenn man statt der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft **N** die gleiche und entgegengesetzte Kraft, oder den auf die Kurve ausgeübten Druck betrachtet, und die der Normalkomponente von **R**, nämlich $\frac{p\omega^2}{g\rho}$, entgegengesetzte Kraft die Centrifugalkraft nennt; so ergibt sich, daß der Druck **N** die Summe aus der Normalkomponente von **F** und der Centrifugalkraft ist, wo diese Summe übrigens eine wirkliche Differenz werden kann, wenn die Normalkomponente der bewegenden Kraft **F** mit der Centrifugalkraft nach entgegengesetztem Sinne wirkt.

Wenn die gegebene Kurve von doppelter Krümmung ist und die Kraft **F** hat eine beliebige Richtung, so kann der Widerstand **N** seiner Natur nach nur nach einer in der Normalebene liegenden Richtung wirken. Wenn keine Reibung statt findet, so wirken auf den beweglichen Punkt nur die beiden Kräfte **N**, **F** und die Resultante derselben ist die weiter oben mit **R** bezeichnete Kraft. Die Normalkomponente dieser letzten Kraft wird wieder durch $\frac{p\omega^2}{g\rho}$ ausgedrückt, wo $\rho$ den Krümmungshalbmesser der gegebenen Kurve bezeichnet, und nach der Theorie der Zusammensetzung der Kräfte muß die in der Normalebene liegende Komponente $\frac{p\omega^2}{g\rho}$ von **R** die Resultante aus der Kraft **N** und der in dieser Ebene liegenden Komponente von **F** sein. Nimmt man nun, wie vorhin, statt der Komponente von **R** die nach entgegengesetzter Richtung wirkende gleiche Kraft, d. h. die Centrifugalkraft, und statt der Kraft **N** die gleiche und entgegengesetzte Kraft oder den auf die Kurve ausgeübten Druck; so ergibt sich, daß dieser Druck die Resultante aus der Normalkomponente von **F** und der Centrifugalkraft ist.

Wenn Reibung statt findet, so hat der Druck **N**, wie man später sehen wird, auch eine Tangentialkomponente, welche alsdann ein bestimmter Theil der Resultante aus den beiden andern Komponenten ist, so daß man, wenn man sie mit der Tangentialkomponente von **F** verbindet, wie vorhin, die Tangentialkomponente von **R**, und folglich das Gesetz der Bewegung des materiellen Punktes auf der Kurve erhält.

§. 22. Bei den Anwendungen auf Maschinen hat man fast nur die Bewegung eines materiellen Punktes im Kreise zu betrachten, und wir wollen uns daher einen Körper denken, welcher sich um eine feste Axe drehet, womit derselbe durch eine vollkommen starre Stange, oder durch irgend einen andern starren Körper verbunden ist, und die Kraft zu bestimmen suchen, welche während der Bewegung auf diese Stange wirkt.

Um die Begriffe besser zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die Axe, um welche sich der Körper drehet, horizontal sei, und folglich der beschriebene Kreis in einer Vertikalebene liegt. Es bezeichne $\rho$ den Halbmesser dieses Kreises, so ist die Kraft, welcher die Stange widerstehen muß, nichts anders, als der vorhin erwähnte auf die Kurve ausgeübte Druck, und folglich die Resultante aus der Centrifugalkraft $\frac{p\omega^2}{g\rho}$ und aus der Normalkomponente des Gewichtes $p$ des Körpers. Wenn also $\alpha$ den spitzen Winkel bezeichnet, welchen das Element des beschriebenen Kreises mit der Vertikale bildet; so wird der Druck in dem untern Halbkreise durch:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\rho} + p \sin \alpha, \text{ oder } p\left(\frac{\omega^2}{g\rho} + \sin \alpha\right),$$

und der in dem obern Halbkreise durch:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\rho} - p \sin\alpha, \text{ oder } p\left(\frac{\omega^2}{g\rho} - \sin\alpha\right)$$

ausgedrückt. Wenn der Körper oder materielle Punkt den tiefsten, oder höchsten Punkt des Kreises erreicht, so wird $\sin\alpha = 1$ und die vorhergehenden Ausdrücke verwandeln sich alsdann in folgende:

$$p\left(\frac{\omega^2}{g\rho} + 1\right) \text{ und } p\left(\frac{\omega^2}{g\rho} - 1\right),$$

und wenn der letzte Ausdruck negativ ist, so wirkt auf die Stange statt einer Zugkraft in dem Sinne der Centrifugalkraft nach entgegengesetztem Sinne eine Druckkraft, wodurch dieselbe gegen die Axe gedrückt wird. Diese Druckkräfte werden, wie das Gewicht $p$ des Körpers in Kilogrammen ausgedrückt.

Wenn der Körper während seines Herabsteigens von der mittlern Höhe bis zu dem tiefsten Punkte des Kreises, d. h. von der Höhe $\rho$, die Geschwindigkeit $\omega$ erlangt, und man will die Spannung der Stange, welche denselben mit der Drehungsaxe verbindet, in dem Augenblicke seiner tiefsten Lage haben; so braucht man nach §. 11 nur $\frac{\omega^2}{2g} = \rho$ zu setzen, wodurch man diese Spannung $= 3p$ erhält. Der von der Centrifugalkraft herrührende Theil dieser Spannung ist $= 2p$, und wenn man dazu das Gewicht $p$ des Körpers addirt; so erhält man die Gesammtspannung $= 3p$.

## Princip der Transmission oder Fortpflanzung der Arbeit bei der Bewegung eines materiellen Punktes.

§. 23. Wir wollen annehmen, daß auf einen materiellen Punkt eine beliebige Anzahl von Kräften nach verschiedenen Richtungen wirken. Wenn **F** die Resultante aus diesen Kräften in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung, $p$ das Gewicht des materiellen Punktes, $\omega$ die Geschwindigkeit desselben und $\delta$ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Richtung der Resultante **F** bildet; so hat man nach §. 19 und §. 20 zwischen dieser Geschwindigkeit und der Tangentialkomponente der Kraft **F** die Relation:

$$\mathbf{F} \cos\delta = \frac{p}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

welche sowohl für die Zeichen, wie für die Zahlenwerthe statt findet, weil wenn $\delta$ stumpf und folglich $\cos\delta$ negativ ist, die Tangentialkomponente $\mathbf{F}\cos\delta$ zu gleicher Zeit eine Geschwindigkeitsabnahme bewirkt, so daß auch $d\omega$ negativ ist.

Betrachten wir nun die Kräfte, deren Resultante $\mathbf{F}$ ist, und bilden daraus zwei Gruppen, wovon die erste diejenigen enthält, deren Tangentialkomponenten in dem Sinne der Geschwindigkeit $\omega$ wirken, während die zweite Gruppe die Kräfte enthält, deren Tangentialkomponenten nach entgegengesetztem Sinne wirken; so haben wir nach §. 16, wenn $\Sigma\mathrm{P}$ die Summe der ersten und $\Sigma\mathrm{P}'$ die der zweiten Gruppe von Komponenten bezeichnet, die Relation:

$$\Sigma\mathrm{P} - \Sigma\mathrm{P}' = \mathbf{F}\cos\delta,$$

welche sowohl für die Zeichen, wie für die Zahlenwerthe statt findet. Vermöge dieser beiden letzten Gleichungen hat man folglich immer:

$$\Sigma\mathrm{P} - \Sigma\mathrm{P}' = \frac{p}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}.$$

Wenn $ds$ den unendlich kleinen Bogen bezeichnet, welchen der betrachtete materielle Punkt in dem unendlich kleinen Zeitelemente $dt$ beschreibt, so erhält man, wenn man beide Theile der letzten Gleichung mit $ds$ multiplicirt:

$$\Sigma\mathrm{P}ds - \Sigma\mathrm{P}'ds = \frac{p}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\cdot ds = \frac{p}{g}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot d\omega,$$

oder wenn man bemerkt, daß $\frac{ds}{dt} = \omega$ ist:

$$\Sigma\mathrm{P}ds - \Sigma\mathrm{P}'ds = \frac{p}{g}\cdot\omega d\omega.$$

Wenn man die beiden Theile dieser letzten Gleichung zwischen den Grenzen integrirt, welche zwei beliebigen Lagen des beweglichen Punktes entsprechen, so hat man, wenn $s_0$, $s_1$ und $\omega_0$, $\omega_1$ resp. die diesen Lagen entsprechenden, von einem festen Punkte aus gezählten Bogen der Trajektorie und Geschwindigkeit bezeichnen:

$$\Sigma\int_{s_0}^{s_1}\mathrm{P}ds - \Sigma\int_{s_0}^{s_1}\mathrm{P}'ds = \frac{p}{g}\cdot\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{p}{g}\cdot\frac{\omega_0^2}{2}.$$

Um aber die Bedeutung dieser Gleichung und die daraus fließenden Folgerungen auf eine einfache und klare Weise ausdrücken zu können, ist es durchaus nothwendig, vorher einige neue Benennungen und Definitionen anzugeben.

§. 24 Es bezeichne $\mathbf{F}$ eine beliebige Kraft, welche auf einen einzelnen materiellen Punkt, oder auf einen zu einem Systeme, dessen Bewegung auch noch von vielen andern Kräften als $\mathbf{F}$ herrühren kann, gehörigen materiellen Punkt wirkt. Wenn die Richtung dieser Kraft mit der Richtung der Geschwindigkeit des betrachteten materiellen Punktes einen spitzen Winkel bildet, und diese Kraft folglich diese Geschwindigkeit zu vergrößern strebt; so wollen wir sie eine Bewegungskraft nennen; aber wenn ihre Richtung mit der der Geschwindigkeit des materiellen Punktes einen stumpfen Winkel bildet, und sie folglich diese Geschwindigkeit zu vermindern strebt, so wollen wir sie eine Widerstandskraft nennen. Hiernach entspricht die Summe $\Sigma\mathbf{P}$ den Bewegungs- und die Summe $\Sigma\mathbf{P}'$ den Widerstandskräften.

Das Integral $\int \mathbf{P}ds$, wovon jedes Element $\mathbf{P}ds$ das Produkt aus der Tangentialkomponente einer Kraft $\mathbf{F}$ und aus dem von ihrem Angriffspunkte beschriebenen unendlich kleinen Bogen $ds$ ist, wird die dieser Kraft $\mathbf{F}$ entsprechende Quantität Arbeit und das Produkt $\mathbf{P}ds$ das derselben Kraft entsprechende Element der Arbeit genannt. Wenn die Kraft $\mathbf{F}$ eine Bewegungskraft ist, so wird auch die ihr entsprechende Arbeit $\int \mathbf{P}ds$ Bewegungsarbeit, und wenn diese Kraft eine Widerstandskraft ist, so wird auch die entsprechende Arbeit Widerstandsarbeit genannt.

Das Arbeitselement $\mathbf{P}ds$ kann auch aus einem andern Gesichtspunkte betrachtet werden; denn wenn $\delta$ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung des Elementes $ds$ mit der Richtung der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft $\mathbf{F}$, deren Tangentialkomponente $\mathbf{P}$ ist, bildet; so hat man:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\cos\delta, \text{ folglich } \mathbf{P}ds = \mathbf{F}\cos\delta . ds.$$

Nun ist aber das Produkt $\cos\delta . ds$ offenbar nichts anders, als die Projektion von $ds$ auf die Richtung der Kraft $\mathbf{F}$, und wenn man folglich diese Projektion mit $df$ bezeichnet; so hat man:

$$\mathbf{P}ds = \mathbf{F}df, \text{ und folglich } \int \mathbf{P}ds = \int \mathbf{F}df.$$

Die Arbeit $\int \mathbf{P}ds$ wird also auch durch das Integral $\int \mathbf{F}df$ ausgedrückt, welches aus einer Summe von Elementen $\mathbf{F}df$ besteht, wovon jedes das Produkt aus jedem Werthe der Kraft $\mathbf{F}$ und der Projection $df$ des unendlich kleinen Bogens $ds$ auf die Richtung dieser Kraft ist.

§. 25. Aus der Definition der Arbeit oder des Arbeitselementes folgt unmittelbar, daß man bei der Bestimmung dieser Größen statt der Quantität Arbeit einer Kraft die Summe der Quantitäten Arbeit ihrer Komponenten nehmen kann, und ebenso kann man für das einem unendlich kleinen Bogen $ds$ entsprechende Arbeitselement die Summe der den Projektionen dieses Bogens auf verschiedene Richtungen entsprechenden Arbeitselemente, d. h. seine Komponenten nach den verschiedenen Richtungen nehmen. Denn nach §. 16 ist die Projektion der Resultante aus einem Systeme von Kräften, welche nach verschiedenen Richtungen auf denselben materiellen Punkt wirken, auf eine beliebige gerade Linie immer die algebraische Summe der Projektionen der Komponenten auf dieselbe gerade Linie. Wenn man folglich die Richtung des Bogens $ds$ zur Projektionsaxe nimmt und die Projektionen der Komponenten von $\mathbf{P}$ auf diese Axe mit $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ etc. bezeichnet; so hat man:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \text{etc.},$$

folglich:

$$\int \mathbf{P} ds = \int \mathbf{P}_1 ds + \int \mathbf{P}_2 ds + \int \mathbf{P}_3 ds + \text{etc.},$$

welche Gleichung die erste der erwähnten Transformationen ausdrückt.

Desgleichen, wenn $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, etc. die Winkel bezeichnen, welche die Projektionen oder Komponenten $ds_1$, $ds_2$, $ds_3$, etc. des unendlich kleinen Bogens $ds$ mit der Richtung der Kraft $\mathbf{F}$ bilden; so hat man, wenn man diesen Bogen und seine Komponenten auf die Richtung der Kraft $\mathbf{F}$ projicirt, die Gleichung:

$$df = \cos\delta . ds = \cos\delta_1 . ds_1 + \cos\delta_2 . ds_2 + \cos\delta_3 . ds_3 + \text{etc.},$$

folglich:

$$\int \mathbf{F} df = \int \mathbf{F} \cos\delta_1 ds_1 + \int \mathbf{F} \cos\delta_2 ds_2 + \int \mathbf{F} \cos\delta_3 ds_3 + \text{etc.},$$

welche die zweite der angeführten Transformationen ausdrückt, weil jedes Glied des zweiten Theiles die Quantität Arbeit ausdrückt, welche man erhalten würde, wenn der materielle Punkt, auf welchen die Kraft $\mathbf{F}$ wirkt, den in diesem Gliede als Faktor vorkommenden kleinen Bogen beschriebe.

Wenn also $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ die Komponenten der Kraft $\mathbf{F}$ nach drei rechtwinkligen Axen, und $dx$, $dy$, $dz$ die Komponenten oder Projektionen des Bogens $ds$ nach denselben Richtungen bezeichnen; so hat man nach dem vorhin Gesagten die Relation:

$$\mathbf{P} ds = \mathbf{F} df = \mathbf{X} dx + \mathbf{Y} dy + \mathbf{Z} dz;$$

denn in diesem Falle sind die Größen $\mathbf{F} \cos\delta_1$, $\mathbf{F} \cos\delta_2$, $\mathbf{F} \cos\delta_3$ nichts anders, als die Komponenten $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ der Kraft $\mathbf{F}$, und die Komponenten $ds_1$, $ds_2$, $ds_3$ des Bogens $ds$ sind nichts anders, als $dx$, $dy$, $dz$. Vermöge der obigen Gleichung kann man folglich in den Ausdruck der Quantität Arbeit einer Kraft die Arbeitsquantitäten einführen, welche von Komponenten herrühren würden, die auf fingirte Punkte wirken, welche sich, wie die Projektionen des Punktes bewegen, worauf diese Kraft wirkt.

§. 26. Wir wollen die Größe $\frac{p\omega^2}{2g} = p \cdot \frac{\omega^2}{2g}$ die **lebendige Kraft** nennen, und wir werden später sehen, wie diese Benennung durch die Natur der dadurch bezeichneten Größe gerechtfertigt wird.

Nach dem Vorhergehenden läßt sich nun leicht der in der Gleichung:

$$\Sigma \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{P} ds - \Sigma \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{P}' ds = \frac{p}{g} \frac{\omega^2}{2} - \frac{p}{g} \frac{\omega_0^2}{2} \qquad (1)$$

enthaltene Satz in Worten ausdrücken, nämlich: **daß für eine beliebige Dauer der Bewegung die Differenz zwischen der Bewegungs- und Widerstandsarbeit der auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte der Zunahme der lebendigen Kraft dieses Punktes während derselben Zeit gleich ist.**

Vermittelst dieser Gleichung kann man die lebendige Kraft $\frac{p\omega^2}{2g}$ des beweglichen Punktes für einen beliebigen Augenblick bestimmen, wenn man dieselbe für einen andern Augenblick kennt, und die Quantitäten Arbeit für den entsprechenden Zeitraum berechnen kann, weshalb man diese Gleichung auch die Gleichung der **lebendigen Kräfte** genannt hat, welche wir die **Gleichung der Transmission oder Uebertragung der Arbeit** nennen wollen. Diese Benennung wird vollständig gerechtfertigt werden, wenn wir die vorhergehende Gleichung auf ein System materieller Punkte ausdehnen; aber sie läßt sich auch schon jetzt genügend rechtfertigen.

Denn wenn man die Bewegung von ihrem Beginne bis zu ihrem Ende, d. h. von dem Augenblicke an, wo die Geschwindigkeit $\omega_0 = 0$ war, bis zu dem Augenblicke, wo die letzte Geschwindigkeit $\omega_1 = 0$ wird, betrachtet; so hat man:

$$\Sigma \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{P} ds - \Sigma \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{P}' ds = 0 \text{ oder } \Sigma \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{P} ds = \Sigma \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{P}' ds, \quad (2)$$

d. h. die Bewegungsarbeit ist in diesem Falle der Widerstandsarbeit gleich. Nun kann man sich aber vorstellen, daß die Kräfte, welche die Widerstandsarbeit hervorbringen, von der Wirkung materieller Punkte herrühren, die mit dem betrachteten in Berührung stehen, und auf welche Druckkräfte ausgeübt werden, die denen gleich und entgegengesetzt sind, welche sie selbst ausüben, und deren Totalarbeit $= \Sigma \int \mathbf{P}' ds$ ist, welche für diese Punkte als Bewegungsarbeit betrachtet werden muß. Man kann also sagen: daß die Arbeit $\Sigma \int \mathbf{P} ds$ der auf den beweglichen Punkt während der ganzen Dauer der Bewegung wirkenden Bewegungskräfte ganz auf die materiellen Punkte übertragen wird, welche die Widerstandskräfte hervorgerufen haben. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, kann die obige Gleichung (2) oder die Gleichung (1), woraus sie abgeleitet ist, die Gleichung der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit genannt werden; aber diese Benennung wird, wie schon bemerkt, noch besonders gerechtfertigt werden, wenn wir gezeigt haben werden, wie die Gleichung (1) auf ein beliebiges System materieller Punkte, oder auf eine Maschine ausgedehnt werden kann.

Wenn man die Gleichung der lebendigen Kräfte, oder der Uebertragung der Arbeit auf ein Zeitintervall anwendet, welches zwischen dem Augenblicke, wo der bewegliche Punkt eine Geschwindigkeit $\omega_0$ hatte, und dem Augenblicke, worin die letzte Geschwindigkeit $\omega_1 = 0$ ist, liegt, und annimmt, daß während dieses Zeitraumes nur Widerstandskräfte $\mathbf{P}'$ wirken; so hat man:

$$\Sigma \int \mathbf{P}' ds = p. \frac{\omega_0^2}{2g}.$$

Wenn nun, wie wir eben bemerkt haben, die Arbeit $\int \mathbf{P}' ds$ der Widerstandskräfte von äußern materiellen Punkten herrührt, welche ihre Wirkungen auf den beweglichen Punkt ausüben; so haben diese äußern Punkte eine Quantität Bewegungsarbeit erhalten, welche genau durch $p. \frac{\omega_0^2}{2g}$ gemessen wird.

Diese letzte Größe kann folglich als der Ausdruck der Arbeit betrachtet werden, welche ein Körper von dem Gewichte $p$ und der Geschwindigkeit $\omega_0$ hervorbringen kann, indem er bis zu dem Erlöschen dieser Geschwindigkeit auf andere materielle Punkte wirkt. Man könnte daher die Größe $p \frac{\omega_0^2}{2g}$ die disponible Quantität Arbeit des Körpers nennen, und man sieht demnach, warum einige Schriftsteller und praktische Mechaniker, welche unter dem Ausdrucke Kraft dasselbe verstanden, was wir Arbeit genannt haben, das Produkt $p \frac{\omega_0^2}{2g}$ lebendige Kraft nennen.

## Relative Bewegung eines materiellen Punktes.

§. 27. Statt die Bewegung eines materiellen Punktes auf feste Axen im Raume zu beziehen, kann es zuweilen erforderlich sein, dieselbe auf Axen zu beziehen, welche sich mit irgend einer Geschwindigkeit im Raume fortbewegen, aber dabei ihre gegenseitige Lage beibehalten. Alsdann sind die Geschwindigkeiten des beweglichen Punktes in Beziehung auf diese Axen relative Geschwindigkeiten, und wir wollen jetzt untersuchen, welche Relationen zwischen diesen relativen Geschwindigkeiten und den Kräften statt finden.

Es seien $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Koordinaten des beweglichen Punktes in Beziehung auf die drei festen rechtwinkligen Axen, $x$, $y$, $z$ die Koordinaten desselben Punktes in Beziehung auf die beweglichen rechtwinkligen Axen, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Koordinaten des beweglichen Anfangspunktes in Beziehung auf die festen Axen, $a, b, c$; $a', b', c'$; $a'', b'', c''$ die Kosinus der Winkel, welche die beweglichen Axen mit den festen Axen bilden, und endlich $\widehat{(xx_1)}, \ldots\ldots$ die Winkel, welche die Axen der $x$ und der $x_1, \ldots\ldots$ mit einander bilden; so hat man:

$$a = \cos\widehat{(xx_1)},\quad b = \cos\widehat{(yx_1)},\quad c = \cos\widehat{(zx_1)},$$
$$a' = \cos\widehat{(xy_1)},\quad b' = \cos\widehat{(yy_1)},\quad c' = \cos\widehat{(zy_1)},$$
$$a'' = \cos\widehat{(xz_1)},\quad b'' = \cos\widehat{(yz_1)},\quad c'' = \cos\widehat{(zz_1)}.$$

Diese Kosinus, so wie die Koordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ des beweglichen Anfangspunktes sind Funktionen der Zeit, und die bekannten Formeln, welche die Relationen zwischen zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen ausdrücken, geben:

$$x_1 = \xi + ax + by + cz,$$
$$y_1 = \eta + a'x + b'y + c'z,$$
$$z_1 = \zeta + a''x + b''y + c''z.$$

Differenzirt man diese Gleichungen in Beziehung auf die Zeit $t$, so erhält man:

$$(\mathrm{B})\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt} + x\dfrac{da}{dt} + y\dfrac{db}{dt} + z\dfrac{dc}{dt} + a\dfrac{dx}{dt} + b\dfrac{dy}{dt} + c\dfrac{dz}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} + x\dfrac{da'}{dt} + y\dfrac{db'}{dt} + z\dfrac{dc'}{dt} + a'\dfrac{dx}{dt} + b'\dfrac{dy}{dt} + c'\dfrac{dz}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dz_1}{dt} = \dfrac{d\zeta}{dt} + x\dfrac{da''}{dt} + y\dfrac{db''}{dt} + z\dfrac{dc''}{dt} + a''\dfrac{dx}{dt} + b''\dfrac{dy}{dt} + c''\dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Wir wollen die Komponenten $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dz}{dt}$ der relativen Geschwindigkeit des materiellen Punktes in Beziehung auf die beweglichen Axen resp. mit $u$, $v$, $w$ und die Komponenten $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dy_1}{dt}$, $\dfrac{dz_1}{dt}$

der absoluten Geschwindigkeit desselben in Beziehung auf die festen Axen mit $u_1$, $v_1$, $w_1$ bezeichnen. Ferner seien $u_e$, $v_e$, $w_e$ die analogen Komponenten für eine fingirte Bewegung in Beziehung auf die festen Axen, welche die des materiellen Punktes sein würde, wenn derselbe in dem betrachteten Augenblicke plötzlich auf eine unveränderliche Weise mit den beweglichen Axen verbunden würde; so hat man die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} u_e &= \frac{d\xi}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}, \\ v_e &= \frac{d\eta}{dt} + x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}, \\ w_e &= \frac{d\zeta}{dt} + x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

und die Gleichungen (B) verwandeln sich also in folgende:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_e + au + bv + cw, \\ v_1 &= v_e + a'u + b'v + c'w, \\ w_1 &= w_e + a''u + b''v + c''w. \end{aligned}\right\} \qquad (i)$$

§. 28. Wir wollen zunächst die Eigenschaften dieser Geschwindigkeiten etwas näher untersuchen. Wenn man von der Geschwindigkeit des beweglichen Anfangspunktes abstrahirt, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} u_e &= x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}, \\ v_e &= x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}, \\ w_e &= x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (l)$$

Zwischen den Kosinussen $a$, $b$, $c$; $a'$, $b'$, $c'$; $a''$, $b''$, $c''$ finden bekanntlich die Relationen statt:

$$\left\{\begin{aligned} &b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \qquad && bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ &c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, && ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ &a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, && ab + a'b' + a''b'' = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (n)$$

woraus sich durch Differenzirung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} bdb + b'db' + b''db'' &= 0, \\ cdc + c'dc' + c''dc'' &= 0, \\ ada + a'da' + a''da'' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (p)$$

$$\left.\begin{aligned} bdc + b'dc' + b''dc'' &= -(cdb + c'db' + c''db''), \\ cda + c'da' + c''da'' &= -(adc + a'dc' + a''dc''), \\ adb + a'db' + a''db'' &= -(bda + b'da' + b''da''). \end{aligned}\right\} \qquad (q)$$

Wir wollen der Kürze wegen setzen:

$$\left.\begin{aligned} cdb + c'db' + c''db'' &= pdt, \\ adc + a'dc' + a''dc'' &= qdt, \\ bda + b'da' + b''da'' &= rdt, \end{aligned}\right\} \qquad (r)$$

und $U_e$ sei die fingirte Geschwindigkeit, deren Komponenten nach den festen Axen resp. $u_e$, $v_e$, $w_e$ sind. Wenn man die Komponenten derselben Geschwindigkeit nach den beweglichen Axen haben will, so muß man bemerken, daß man nach der bekannten Theorie der Projektionen die Relation hat:

$$U_e \cos(\widehat{U_e x}) = au_e + a'v_e + a''w_e.$$

Multiplicirt man folglich die erste der Gleichungen ($l$) mit $a$, die zweite $a'$, die dritte $a''$ und addirt die Produkte zusammen; so kommt:

$$\begin{aligned} U_e \cos(\widehat{U_e x}) = x\frac{ada}{dt} &+ y\frac{adb}{dt} + z\frac{adc}{dt} \\ + x\frac{a'da'}{dt} &+ y\frac{a'db'}{dt} + z\frac{a'dc'}{dt} \\ + x\frac{a''da''}{dt} &+ y\frac{a''db''}{dt} + z\frac{a''dc''}{dt}, \end{aligned}$$

oder wenn man die obigen Relationen berücksichtigt:

$$U_e \cos(\widehat{U_e x}) = -ry + qz = qz - ry.$$

Durch eine ähnliche Rechnung findet man eben so:

$$U_e \cos(\widehat{U_e y}) = rx - pz,$$

$$U_e \cos(\widehat{U_e z}) = py - qx.$$

Wenn man diese Werthe näher untersucht, so findet man, daß die Richtung der Geschwindigkeit $U_e$ zu gleicher Zeit auf zwei Richtungen senkrecht ist, welche mit den beweglichen Axen Winkel bilden, deren Kosinus durch:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

und:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

ausgedrückt werden, was daraus folgt, daß die Summen der Produkte aus je zwei dieser Kosinus $=0$ sind, nämlich:

$$x\cos(\widehat{U_e x}) + y\cos(\widehat{U_e y}) + z\cos(\widehat{U_e z}) = 0,$$

$$p\cos(\widehat{U_e x}) + q\cos(\widehat{U_e y}) + r\cos(\widehat{U_e z}) = 0.$$

Es sei **O** (Fig. 10) der bewegliche Anfangspunkt, **M** der betrachtete materielle Punkt und **P** ein geometrischer Punkt, dessen Koordinaten in Beziehung auf die beweglichen Axen $p$, $q$, $r$ sind; so haben die geraden Linien **OM** und **OP** genau die vorhin erwähnte Richtung, und wenn wir aus dem Punkte **M** das Perpendikel **MC** auf **OP** fällen; so ist die zugleich auf **OM** und **OP** senkrechte Geschwindigkeit $U_e$ auch auf der geraden Linie **MC** senkrecht, welche in der Ebene der beiden letzten geraden Linien liegt. Da aber die Richtung von **OP** während der unendlich kleinen Zeit $dt$ nahezu konstant ist, so fällt die Richtung von $U_e$ mit der Richtung eines Kreisbogens zusammen, welcher in einer auf **OP** senkrechten Ebene aus dem Punkte **C** als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser **CM** beschrieben ist, d. h. die fingirte Bewegung des materiellen Punktes mit den beweglichen Axen ist während der unendlich kleinen Zeit $dt$ eine Rotationsbewegung um die Axe **OP**, und wenn $\varphi$ die Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung bezeichnet; so ist $U_e = \varphi . \mathbf{MC}$.

Wenn man den Winkel $\mathbf{MOP} = \delta$ setzt, und die Werthe der Kosinus der Winkel, welche die geraden Linien **OM**, **OP** mit den beweglichen Axen bilden, berücksichtigt; so hat man:

$$\cos\delta = \frac{px+qy+rz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

folglich:

$$\sin\delta = \frac{\sqrt{(py-qx)^2+(rx-pz)^2+(qz-ry)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

oder:

$$\sin\,\delta = \frac{U_e}{OM.\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

oder:

$$OM \sin\delta = MC = \frac{U_e}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \text{ und } U_e = \sqrt{p^2+q^2+r^2}.MC$$

und endlich wegen $U_e = \varphi.MC$ für die Winkelgeschwindigkeit $\varphi$ den Ausdruck:

$$\varphi = \sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Die Größen $p$, $q$, $r$ sind nicht von den Koordinaten $x$, $y$, $z$, sondern blos von den Winkeln abhängig, welche die beweglichen Axen mit den festen Axen bilden, und von den Veränderungen dieser Winkel. Folglich ist die von dem beweglichen Anfangspunkte nach dem Punkte, dessen Koordinaten in Beziehung auf die beweglichen Axen, $p$, $q$, $r$ sind, gezogene gerade Linie für alle Punkte, welche der Bewegung der beweglichen Axe folgen, eine Rotationsaxe, und aus diesem Grunde hat man diese gerade Linie eine augenblickliche Rotationsaxe des Systemes genannt. Wenn $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel bezeichnen, welche die augenblickliche Rotationsaxe mit den beweglichen Axen bildet, so hat man:

$$p = \varphi\cos\lambda, \quad q = \varphi\cos\mu, \quad r = \varphi\cos\nu.$$

### Ausdruck der Kraft bei der relativen Bewegung.

§. 29. Wir wollen nun die Relationen aufsuchen, welche zwischen den relativen Geschwindigkeiten und den Kräften statt finden. Durch ein gewöhnliches $d$ wollen wir die Differenziale bezeichnen, welche für die relative Bewegung des materiellen Punktes in Beziehung auf die beweglichen Axen genommen sind, d. h. wenn man nur die Zeit $t$ in $x$, $y$, $z$ sich ändern läßt, und durch $d_e$ die Differenziale für die Fortbewegung des materiellen Punktes mit dem beweglichen Axensysteme, d. h. wenn man die Zeit $t$ nur in $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und in $a$, $b$, $c$; $a'$, $b'$, $c'$; $a''$, $b''$, $c''$ variiren läßt, und endlich durch $d_1$ die Differenziale für die absolute Bewegung des materiellen Punktes in Beziehung auf die festen Axen, d. h. wenn man die Zeit $t$ zugleich in $x$, $y$, $z$ und in $\xi$, $\eta$, $\zeta$; $a$, $b$, $c$; $a'$ $b'$ $c'$; $a''$, $b''$, $c''$ variiren läßt.

Wenn man die erste der Gleichungen (B) differenzirt, indem alle darin vorkommenden Größen als veränderlich betrachtet werden, so erhält man:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \left[\frac{d^2\xi}{dt^2} + x\,\frac{d^2a}{dt^2} + y\,\frac{d^2b}{dt^2} + z\,\frac{d^2c}{dt^2}\right] + \left[a\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{d^2y}{dt^2} + c\,\frac{d^2z}{dt^2}\right]$$
$$+ 2\left[\frac{dx}{dt}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{db}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dc}{dt}\right].$$

Wendet man nun die eben erwähnten Bezeichnungen an, so kann der erste Theil dieser Gleichung durch $\frac{d_1u_1}{dt}$ ausgedrückt werden, und da die in der ersten Parenthese stehenden Glieder genau das Differenzial des durch die erste der Gleichungen ($h$) gegebenen Werthes von $u_e$ bilden, indem man $x$, $y$, $z$ als konstant betrachtet; so kann man die in dieser Parenthese stehende Größe durch $\frac{d_eu_e}{dt}$ ausdrücken, so daß die vorhergehende Gleichung folgende Form annimmt:

$$\frac{d_1u_1}{dt} = \frac{d_eu_e}{dt} + \left(a\,\frac{du}{dt} + b\,\frac{dv}{dt} + c\,\frac{dw}{dt}\right) + 2\left[u\,\frac{da}{dt} + v\,\frac{db}{dt} + w\,\frac{dc}{dt}\right],$$

und wenn man die beiden letzten der Gleichungen (**B**) auf dieselbe Weise behandelt; so erhält man ebenso:

$$\frac{d_1v_1}{dt} = \frac{d_ev_e}{dt} + \left(a'\,\frac{du}{dt} + b'\,\frac{dv}{dt} + c'\,\frac{dw}{dt}\right) + 2\left[u\,\frac{da'}{dt} + v\,\frac{db'}{dt} + w\,\frac{dc'}{dt}\right],$$
$$\frac{d_1w_1}{dt} = \frac{d_ew_e}{dt} + \left(a''\,\frac{du}{dt} + b''\,\frac{dv}{dt} + c''\,\frac{dw}{dt}\right) + 2\left[u\,\frac{da''}{dt} + v\,\frac{db''}{dt} + w\,\frac{dc''}{dt}\right]. \qquad (s)$$

Wenn $\Pi$ das Gewicht des materiellen Punktes, **F** die seine absolute Bewegung bewirkende Kraft und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel bezeichnen, welche die Richtung dieser Kraft mit den festen Axen bildet; so hat man nach den Relationen im §. 17:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}\cos\alpha &= \frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_1u_1}{dt}, \\ \mathbf{F}\cos\beta &= \frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_1v_1}{dt}, \\ \mathbf{F}\cos\gamma &= \frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_1w_1}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (t)$$

Aus den Gleichungen ($s$) ergibt sich, nachdem man sie durch $\frac{\Pi}{g}$ multiplicirt hat:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Pi}{g}\left(a\ \frac{du}{dt}+b\frac{dv}{dt}+c\frac{dw}{dt}\right)\\
&\qquad=\mathbf{F}\cos\alpha-\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_e u_e}{dt}-\frac{2\Pi}{g}\left(u\frac{da}{dt}+v\frac{db}{dt}+w\frac{dc}{dt}\right),\\
&\frac{\Pi}{g}\left(a'\frac{du}{dt}+b'\frac{dv}{dt}+c'\frac{dw}{dt}\right)\\
&\qquad=\mathbf{F}\cos\beta-\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_e v_e}{dt}-\frac{2\Pi}{g}\left(u\frac{da'}{dt}+v\frac{db'}{dt}+w\frac{dc'}{dt}\right),\\
&\frac{\Pi}{g}\left(a''\frac{du}{dt}+b''\frac{dv}{dt}+c''\frac{dw}{dt}\right)\\
&\qquad=\mathbf{F}\cos\gamma-\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_e w_e}{dt}-\frac{2\Pi}{g}\left(u\frac{da''}{dt}+v\frac{db''}{dt}+w\frac{dc''}{dt}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(u)$$

und wenn man bemerkt, daß die Projektion einer Kraft auf eine Axe der Summe der Projektionen der Komponenten derselben auf dieselbe Axe gleich ist; so erkennt man leicht, daß die ersten Theile der drei vorhergehenden Gleichungen die Projektionen einer fingirten Kraft, deren Komponenten nach den beweglichen Axen resp. $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{du}{dt}$, $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dv}{dt}$, $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dw}{dt}$ sind, auf die drei festen Axen ausdrücken. Diese fingirte Kraft ist diejenige, welche für einen sich mit den beweglichen Axen fortbewegten Beobachter die relative Bewegung des materiellen Punktes in Beziehung auf diese beweglichen Axen hervorbringen könnte.

Die in den zweiten Theil derselben Gleichungen vorkommenden Glieder $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_e u_e}{dt}$, $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_e v_e}{dt}$, $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_e w_e}{dt}$ sind die Komponenten der Kraft nach den festen Axen, welche die Fortbewegung des materiellen Punktes mit den beweglichen Axen bewirken könnte. Wir wollen diese Kraft durch $\mathbf{F}_e$, die Winkel, welche ihre Richtung mit den beweglichen Axen bildet, durch $l_e$, $m_e$, $n_e$ und die Winkel, welche die Richtung der Kraft $\mathbf{F}$ mit denselben beweglichen Axen bildet, durch $l$, $m$, $n$ bezeichnen.

Wenn man die erste der Gleichungen ($u$) mit $a$, die zweite $a'$, die dritte $a''$ multiplicirt, die Produkte zusammenaddirt, dann in Beziehung auf $b$, $b'$, $b''$ und $c$, $c'$, $c''$ eben so verfährt, und endlich die weiter oben angegebenen Relationen zwischen diesen verschiedenen Kosinussen und ihren Differenzialen berücksichtigt; so erhält man nach verrichteten Reduktionen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{du}{dt}&=\mathbf{F}\cos l-\mathbf{F}_e\cos l_e-\frac{2\Pi}{g}(qw-rv),\\ \frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dv}{dt}&=\mathbf{F}\cos m-\mathbf{F}_e\cos m_e-\frac{2\Pi}{g}(ru-pw),\\ \frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dw}{dt}&=\mathbf{F}\cos n-\mathbf{F}_e\cos n_e-\frac{2\Pi}{g}(pv-qu),\end{aligned}\right\}\qquad(v)$$

worin die Projektionen der Kräfte auf die beweglichen Axen und nicht mehr die auf die festen Axen vorkommen. Diese Gleichungen zeigen, daß man die relative Bewegung eines materiellen Punktes in Beziehung auf bewegliche Axen ebenso behandeln kann, wie eine absolute Bewegung in Beziehung auf feste Axen, wenn man annimmt, daß außer der wirklichen Kraft **F** noch zwei fingirte Kräfte auf den materiellen Punkt wirken. Die erste dieser fingirten Kräfte ist der Kraft $\mathbf{F}_e$, welche die Fortbewegung des materiellen Punktes mit den beweglichen Axen, d. h. die Bewegung dieses Punktes hervorbringen könnte, welche derselbe annehmen würde, wenn er plötzlich auf eine unveränderliche Weise mit den beweglichen Axen verbunden würde, gleich und gerade entgegengesetzt.

Die Projektionen der zweiten fingirten Kraft auf die beweglichen Axen sind:

$$-\frac{2\Pi}{g}(pw-rv),\ -\frac{2\Pi}{g}(ru-pw),\ -\frac{2\Pi}{g}(pv-qu),$$

und wenn man diese Kraft mit $\mathbf{F}'$ bezeichnet; so hat man:

$$\mathbf{F}'=\frac{2\Pi}{g}\sqrt{(qw-rv)^2+(ru-pw)^2+(pv-qu)^2}\,.$$

Die Richtung dieser Kraft ist auf den beiden Richtungen senkrecht, welche mit den beweglichen Axen Winkel bilden, deren Kosinus folgende Werthe haben:

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},$$

und:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

und wenn man den von diesen beiden Richtungen gebildeten Winkel mit $\delta'$ bezeichnet; so findet man leicht:

$$\sin\delta = \frac{\sqrt{(qw-rv)^2+(ru-pw)^2+(pv-qu)^2}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,.\,\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

woraus folgt:

$$F' = 2\frac{\Pi}{g}\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,.\,\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,.\sin\delta'.$$

Nun ist aber $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ die Winkelgeschwindigkeit $\varphi$ der Drehung um die augenblickliche Axe und $\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,.\sin\delta'$ ist nichts anders, als die Projektion der relativen Geschwindigkeit $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ auf eine auf dieser Axe senkrechte Ebene, weil $\delta'$ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der der augenblicklichen Drehungsaxe bildet. Bezeichnet man diese relative Geschwindigkeit mit $\Omega$, so kann man folglich setzen:

$$F' = 2\frac{\Pi}{g}\,.\,\varphi\Omega\sin\delta'.$$

Diese letzte Gleichung lehrt: daß die zweite fingirte Kraft, welche man einführen muß, um die relative Bewegung wie eine absolute behandeln zu können, das Doppelte der Kraft ist, welche die Beschleunigung $\varphi\Omega\sin\delta'$ hervorbringen könnte, die das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung um die augenblickliche Axe und aus der Projektion der relativen Geschwindigkeit auf eine auf dieser Axe senkrechte Ebene ist, und ihre Richtung ist auf der augenblicklichen Rotationsaxe der beweglichen Axen und auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit senkrecht.

### Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit bei der relativen Bewegung eines materiellen Punktes.

§. 30. Untersuchen wir nun, wie sich bei der relativen Bewegung eines freien materiellen Punktes das Princip der lebendigen Kräfte oder der Uebertragung der Arbeit gestaltet.

Wenn man die erste der Gleichungen ($v$) mit $udt$, die zweite mit $vdt$, die dritte mit $wdt$ multiplicirt und die Produkte zusammenaddirt; so heben sich die Glieder mit $\frac{2\Pi}{g}$ gegenseitig auf, und wenn man bemerkt, daß man hat:

$$\Omega^2 = u^2+v^2+w^2,\ \text{folglich}\ \Omega d\Omega = udu+vdv+wdw;$$

so läßt sich die erhaltene Gleichung auf folgende Form bringen:

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega d\Omega = \mathbf{F}(u\cos l + v\cos m + w\cos n)\,dt$$
$$- \mathbf{F}_e(u\cos l_e + v\cos m_e + w\cos n_e)\,dt;$$

es ist aber:

$$u = \Omega\cos(\widehat{\Omega x}),\quad v = \Omega\cos(\widehat{\Omega y}),\quad w = \Omega\cos(\widehat{\Omega z}),$$

und folglich hat man:

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega d\Omega = \mathbf{F}\Omega dt\,[\cos(\widehat{\Omega x})\cos l + \cos(\widehat{\Omega y})\cos m + \cos(\widehat{\Omega z})\cos n]$$
$$- \mathbf{F}_e\Omega dt\,[\cos(\widehat{\Omega x})\cos l_e + \cos(\widehat{\Omega y})\cos m_e + \cos(\widehat{\Omega z})\cos n_e],$$

oder vielmehr:

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega d\Omega = \mathbf{F}\,\Omega dt\cos(\widehat{\Omega \mathbf{F}}) - \mathbf{F}_e\Omega dt\cos(\widehat{\Omega \mathbf{F}_e}).$$

Wenn man mit $df$, $df_e$ die Projektionen des während der Zeit $dt$ beschriebenen relativen Wegelementes auf die Richtungen der Kräfte $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_e$ bezeichnet, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega d\Omega = \mathbf{F}df - \mathbf{F}_e df_e,$$

woraus folgt, wenn man zwischen zwei Zeitmomenten integrirt, für welche die relative Geschwindigkeit die Werthe $\Omega_0$ und $\Omega_1$ hat:

$$\Pi\,\frac{\Omega_1^2}{2g} - \Pi\,\frac{\Omega_0^2}{2g} = \int\mathbf{F}\,df - \int\mathbf{F}_e\,df_e.$$

In dieser Gleichung kommt die zweite fingirte Kraft nicht vor, wie auch zu erwarten war, weil diese Kraft auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit oder der des beschriebenen Wegelementes senkrecht ist, und folglich keine relative Arbeit hervorbringen kann.

Wenn man annimmt, wie wir es im Vorhergehenden gethan haben, daß die Kräfte $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_e$ die Resultanten aus mehreren andern Kräften sind, diese Kräfte auf die Richtung des Elementes $ds$ des relativen Weges und nicht dieses Element selbst auf die Richtung jeder Kraft projicirt, was in Beziehung auf die Arbeit gleichgültig ist, dann diejenigen dieser Projektionen, welche in den Sinn der relativen Geschwindigkeit $\Omega$ fallen, zu einer ersten Gruppe, und die nach dem entgegengesetzten Sinne gerichteten zu einer zweiten Gruppe verbindet, und endlich mit **P**, **P′** zwei beliebige Projektionen aus diesen beiden Gruppen, so wie mit $\mathbf{P}_e$, $\mathbf{P}'_e$ zwei analoge Projektionen in Beziehung auf die Resultante **F** bezeichnet; so kann die vorhergehende Gleichung auf folgende Form gebracht werden:

$$\Pi\,\frac{\Omega_1{}^2}{2g}-\Pi\,\frac{\Omega_0{}^2}{2g}=\Sigma\int\mathbf{P}ds-\Sigma\int\mathbf{P}'ds-\Sigma\int\mathbf{P}_e ds+\Sigma\int\mathbf{P}'_e ds,$$

woraus folgt: daß die Gleichung der lebendigen Kräfte oder der Uebertragung der Arbeit auch noch bei der relativen Bewegung statt findet, wofern man zu der Arbeit der gegebenen Kräfte **F** noch die hinzufügt, welche die Kräfte hervorbringen würden, die denen gleich und entgegengesetzt sind, welche auf den materiellen Punkt wirken müßten, wenn sich derselbe so bewegen sollte, als wenn er mit den beweglichen Axen auf eine unveränderliche Weise fest verbunden wäre.

### Princip der Uebertragung der Arbeit bei der relativen Bewegung, wenn sich die beweglichen Axen gleichförmig um eine gegebene Axe drehen.

§. 31. Um von diesem Principe eine Anwendung zu machen, wollen wir annehmen, daß die Bewegung der beweglichen Axen eine gleichförmige Rotationsbewegung um eine gegebene Axe sei; so ist die Kraft, welche dem materiellen Punkte dieselbe Rotationsbewegung ertheilen kann, als wenn er mit den beweglichen Axen auf eine unveränderliche Weise fest verbunden wäre, nichts anders als die Centripetalkraft und die der Kraft $\mathbf{F}_e$ gleiche und entgegengesetzte Kraft ist genau die Centrifugalkraft, welche durch:

$$\frac{\Pi}{g}\,\varphi^2 r$$

ausgedrückt wird, wo $\varphi$ die Winkelgeschwindigkeit und $r$ die Entfernung des materiellen Punktes von der Rotationsaxe ist.

Da $dr$ das in dem Sinne der Centrifugalkraft beschriebene relative Wegelement ist, so reducirt sich das Glied $-\int\mathbf{F}_e df_e$ auf $\int\frac{\Pi}{g}\,\varphi^2 r dr=\frac{\Pi}{2g}\,\varphi^2(r_0{}^2-r_0{}^2)$, wo $r_1$ und $r_0$ die den beiden Augenblicken, zwischen welchen die Gleichung der lebendigen Kräfte angewandt wird, entsprechenden Werthe der Entfernung $r$ des materiellen Punktes von der Rotationsaxe bezeichnen.

Wenn $u_1$ und $u_0$ die Geschwindigkeiten bezeichnen, welche der materielle Punkt in den beiden erwähnten Augenblicken annehmen würde, wenn derselbe mit den beweglichen Axen fest verbunden wäre; so hat man:

$$\varphi^2 r_1{}^2 = u_1{}^2 \text{ und } \varphi^2 r_0{}^2 = u_0{}^2,$$

so daß sich das vorhergehende Integral auf:

$$\frac{\Pi u_1{}^2}{2g} - \frac{\Pi u_0{}^2}{2g}$$

reducirt, und die Gleichung der lebendigen Kräfte auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\Pi \frac{\Omega_1{}^2}{2g} - \Pi \frac{\Omega_0{}^2}{2g} = \Sigma \int P ds - \Sigma \int P' ds + \Pi \frac{u_1{}^2}{2g} - \Pi \frac{u_0{}^2}{2g},$$

woraus folgt: daß man bei der relativen Bewegung eines materiellen Punktes in Beziehung auf ein Axensystem, welches sich mit einer gleichförmigen Rotationsgeschwindigkeit um eine feste Axe drehet, zur Bestimmung des Zuwachses der relativen lebendigen Kraft nur zu der, wie bei der absoluten Bewegung, berechneten Quantität Arbeit den Zuwachs der lebendigen Kraft hinzuzufügen braucht, welcher der Rotationsgeschwindigkeit entspricht, die der materielle Punkt in seinen beiden äußersten Lagen haben würde, wenn derselbe in den beiden entsprechenden Augenblicken mit dem ganzen rotirenden Systeme fest verbunden wäre.

## Gleichgewicht oder gegenseitige Aufhebung der auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte.

§. 32. Man sagt: daß die auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte einander gegenseitig aufheben, oder im Gleichgewichte sind, wenn sie diesen materiellen Punkt weder aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung versetzen, noch die bereits erlangte Geschwindigkeit desselben, welche er unter der Wirkung anderer Kräfte annimmt, auf irgend eine Weise verändern können. So lange die betrachteten Kräfte eine Resultante haben, strebt diese offenbar dem materiellen Punkte, auf welchen sie wirkt, eine gewisse Bewegung zu ertheilen, oder die bereits angenommene Bewegung desselben zu verändern. Soll also das Gleichgewicht zwischen diesen Kräften statt finden, so muß ihre Resultante $= 0$ sein, wozu erfordert wird, daß die Projektionen der Resultante auf drei verschiedene Richtungen einzeln $= 0$ sind, und da die Projektion der Resultante auf eine Axe der algebraischen

Summe der Projektionen ihrer Komponenten auf dieselbe Axe gleich ist; so ist zum Gleichgewichte eines auf denselben materiellen Punkt wirkenden Systemes von Kräften erforderlich, daß die algebraische Summe der Projektionen dieser Kräfte auf drei verschiedene Richtungen für jede dieser Richtungen einzeln $=0$ ist, welche Bedingung übrigens auch hinreichend ist, weil, wenn sie erfüllt wird, die Resultante selbst offenbar $=0$ ist.

Man kann diese Bedingung auch noch unter einer andern Form ausdrücken, welche in dem gegenwärtigen Falle zwar weder einfacher, noch bequemer ist; aber bei der Untersuchung des Gleichgewichtes ganzer Systeme materieller Punkte, wie Körper und Maschinen, wesentliche Vorzüge hat, und blos als Vorbereitung zu dieser Untersuchung mag die folgende Bemerkung hier Platz finden.

### Bedingung des Gleichgewichtes eines materiellen Punktes durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Wenn mehrere Kräfte auf denselben materiellen Punkt wirken, so ist nach §. 25 das Element der Arbeit der Resultante der algebraischen Summe der Arbeitselemente der Komponenten gleich, von welcher Beschaffenheit übrigens die Bewegung des materiellen Punktes auch sein mag. Wenn folglich die Resultante gleich Null ist, und die Bewegung des materiellen Punktes, von welcher Beschaffenheit sie auch sein mag, von andern Kräften als die betrachtete herrührt; so kann man sagen, daß die zum Gleichgewichte erforderliche, aber auch hinreichende Bedingung darin besteht: daß die algebraische Summe der Elemente der Arbeit der betrachteten Kräfte für drei unendlich kleine Verrückungen des materiellen Punktes gleich Null sind.

Diese unendlich kleinen willkürlichen Verrückungen sind hier geometrische Größen, welche durchaus in keiner Beziehung zu den Kräften stehen, deren Gleichgewicht dargethan werden soll; denn sie werden nur angewandt, um drei willkürliche Richtungen einzuführen, auf welche die Kräfte projicirt werden können, worauf dargethan werden muß, daß die algebraischen Summen dieser Projektionen genau gleich Null sind.

Diese unendlich kleinen willkürlichen Verrückungen oder Wege werden virtuelle Geschwindigkeiten genannt, obgleich sie keine wirklichen Geschwindigkeiten sind, und die diesen unendlich kleinen Verrückungen entsprechenden Arbeitselemente hat man virtuelle Momente genannt, wo das Wort virtuell ausdrücken soll, daß hier nicht von wirklichen, sondern von hypothetischen Bewegungen die Rede ist, für welche es genügt, sich ihre Möglichkeit vorstellen zu können.

Man kann also sagen: **daß die auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind wenn die algebraischen Summen ihrer Arbeitselemente für drei beliebige unendlich kleine Verrückungen Null sind, oder wenn die algebraischen Summen der virtuellen Momente für drei verschiedene virtuelle Bewegungen gleich Null sind.**

Hierin besteht das sogenannte **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten**, welches wir hier blos anführen, weil es später bei jeder Art des Gleichgewichtes zusammengesetzterer Systeme vorkommt, und es zweckmäßig ist, zuvor einen einfachen Fall desselben kennen zu lernen, obgleich es hier nur den Vortheil gewährt, die Bedeutung der in seinem Ausdrucke vorkommenden Benennungen kennen zu lehren, und in dem gegenwärtigen Falle ist dieses Princip genau besehen, weiter nichts, als eine andere Ausdrucksweise der Bedingung des Gleichgewichtes: **daß die Resultante der betrachteten Kräfte gleich Null sein muß.** Dieses Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gibt die für das Gleichgewicht erforderlichen und hinreichenden Bedingungen; denn wenn man in jeder Summe der Arbeitselemente, welche gleich Null ist, das Wegelement oder die virtuelle Geschwindigkeit als gemeinschaftlichen Faktor hinwegläßt, so kommt man wieder auf die drei Gleichungen, welche ausdrücken: **daß die algebraischen Summen der Projektionen der Kräfte auf drei verschiedene Richtungen gleich Null sind.**

## Arbeit der gegenseitigen Einwirkung zweier materieller Punkte auf einander.

§. 33. Wenn man von der Betrachtung eines einzelnen materiellen Punktes zu der eines Systemes materieller Punkte, oder gar einer beliebigen Maschine übergehen will, um die Bewegung, oder das Gleichgewicht zu untersuchen; so muß man nothwendig das **Princip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung** zur Anwendung bringen, welches wir bereits bei der Untersuchung der Bewegung eines materiellen Punktes angeführt haben, welcher sich auf einer gegebenen Kurve bewegen muß (§. 21), wo wir annahmen, daß, wenn zwei Körper einen gegenseitigen Druck auf einander ausüben, die von dem einen dieser Körper auf den andern ausgeübte Wirkung genau der gleich und entgegengesetzt ist, welche dieser auf jenen ausübt. Diese Erfahrungswahrheit ist weiter nichts, als eine Folge aus dem Principe der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zweier einander berührender Molekule, welches Princip man folgendermaßen ausdrücken kann:

Wenn zwei materielle Punkte $m$ und $m'$ durch Anziehung oder Abstoßung auf einander wirken, und die von $m'$ auf $m$ ausgeübte Wirkung ist eine nach der geraden Linie $mm'$ gerichtete Kraft $\mathbf{R}$; so ist die von $m$ auf $m'$ ausgeübte Wirkung eine Kraft $\mathbf{R}$, welche ebenfalls nach der geraden Linie $mm'$, aber nach entgegengesetztem Sinne gerichtet ist.

Man sieht leicht ein, daß ein Gesetz dieser Art nicht direkt durch das Experiment bestätigt werden kann; allein man wird zu der Annahme desselben geführt, wenn man bemerkt, daß zwischen den daraus abgeleiteten theoretischen Folgerungen und der Beobachtung der täglich vor unsern Augen stattfindenden mechanischen Erscheinungen stets eine vollkommene Uebereinstimmung statt findet.

§. 34. Als erste Folgerung aus diesem Principe wollen wir zeigen: daß, wenn $r$ die veränderliche gegenseitige Entfernung zweier materieller Punkte $m$ und $m'$ bezeichnet, welche nach der Richtung ihre Verbindungslinie $mm'$ gleiche und entgegengesetzte Wirkungen $= \mathbf{R}$ aufeinander ausüben, die Summe der Quantitäten der Bewegungs- und Widerstandsarbeit, wie sie in der Gleichung der lebendigen Kräfte vorkommen muß, sich immer auf $\int \mathbf{R}dr$ reducirt, wo dieses Integral positiv, oder negativ ist, d. h. die Gesammtarbeit als Bewegungs- oder als Widerstandsarbeit betrachtet werden muß, jenachdem der Zuwachs $dr$ bei der Bewegung der beiden materiellen Punkte in dem Sinne der Wirkung von $\mathbf{R}$, oder in entgegengesetztem Sinne erfolgt.

Zu dem Zwecke müssen wir aber vorher zeigen, daß die Summe der von den gegenseitigen Einwirkungen zweier materieller Punkte auf einander herrührenden Quantitäten Arbeit nicht geändert wird, wenn diese Punkte außer ihrer relativen Bewegung noch eine gemeinschaftliche Bewegung haben, oder eine Bewegung, welche auf der Richtung ihrer Verbindungslinie $mm'$ senkrecht ist, d. h. eine Rotationsbewegung um einen Punkt dieser geraden Linie.

In §. 25 haben wir aber gesehen, daß man bei der Berechnung der Arbeit für das beschriebene Wegelement die Summe seiner Komponenten setzen kann, so daß folglich, wenn ein materieller Punkt gleichzeitig mehrere Bewegungen hat, das absolute Arbeitselement erhalten wird, wenn man die Summe der für die einzelnen Bewegungen berechneten Arbeitselemente bildet. In dem gegenwärtigen Falle müßte man folglich zu dem blos in der Voraussetzung der relativen Bewegung der beiden materiellen Punkte berechneten Arbeitselemente noch die Arbeitselemente hinzufügen, welche den Bewegungen entsprechen, die diese materiellen Punkte außer ihrer relativen Bewegung noch haben sollen.

Wenn es sich aber zunächst um eine gemeinschaftliche Bewegung der beiden materiellen Punkte $m, m'$ handelt, so sind die beschriebenen Wegelemente einander gleich, parallel und nach demselben Sinne gerichtet, und da die Kräfte **R** einander gleich und nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind; so sind die dieser Bewegung entsprechenden Arbeitselemente paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen, und folglich ist ihre Summe, welche in die Gleichung der lebendigen Kräfte eingeführt werden muß, genau gleich Null.

Wenn zweitens die beiden materiellen Punkte $m, m'$ außer ihrer relativen Bewegung noch eine andere Bewegung hätten, deren Geschwindigkeit auf der geraden Linie $mm'$ senkrecht ist, oder wenn sie eine Rotationsbewegung um einen Punkt dieser geraden Linie hätten; so wären die Arbeitselemente beständig gleich Null, weil die Projektion einer Kraft auf eine auf ihr senkrechte gerade Linie gleich Null ist: und mithin ist auch die Summe der dieser Bewegung entsprechenden Quantitäten Arbeit $= 0$.

Um nun die den beiden gegenseitigen Einwirkungen **R** der beiden materiellen Punkte $m, m'$ während ihrer Bewegung entsprechende Quantität Arbeit zu bestimmen, können wir, ohne diese Größe zu ändern, den beiden materiellen Punkten zunächst eine gemeinschaftliche Bewegung beilegen, welche der Bewegung eines derselben, z. B. $m$, gleich und entgegengesetzt ist; so bleibt der Punkt $m$ in Ruhe, und der Punkt $m'$ kann als zwei Bewegungen habend, angesehen werden, nämlich eine Bewegung, vermöge welcher er sich auf der Verbindungslinie $mm'$ dem Punkte $m$ nähert, oder davon entfernt, und eine zweite Bewegung, vermöge welcher sich diese gerade Linie selbst um den festen Punkt $m$ drehet.

Geben wir nun dem Punkte $m'$ noch eine Supplementarbewegung, welche der genau gleich und entgegengesetzt ist, mit welcher sich die gerade Linie $mm'$ um den Punkt $m$ drehet; so wird, da diese Supplementarbewegung auf der geraden Linie $mm'$ senkrecht ist, die Arbeit nicht geändert, und wenn die gerade Linie $mm'$ unbeweglich geworden ist, so hat der Punkt $m'$ nur noch eine geradlinige Bewegung nach dieser geraden Linie. Das Arbeitselement reducirt sich also auf $\mathbf{R}dr$, wo das Zeichen desselben positiv ist, wenn der Weg $dr$ in dem Sinne der Kraft **R** beschrieben ist, welche hier die Wirkung von $m$ auf $m'$ bezeichnet, und negativ, wenn dieser Weg $dr$ in entgegengesetztem Sinne beschrieben ist. Die Gesammtarbeit für eine gewisse Dauer der Bewegung wird also durch das für diese Dauer genommene Integral $\int \mathbf{R}dr$ ausgedrückt.

Es ist wohl zu bemerken, daß, wenn die Entfernung $r$, ungeachtet der partiellen Veränderungen, welche sie während der Bewegung hat erfahren können, nach einer gewissen Zeit wieder dieselbe geworden und die Kraft R blos eine Funktion von $r$ ist, das sich auf diese Zeitdauer beziehende Integral aus Elementen besteht, welche paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, weil sich die Kraft nach der Voraussetzung nur mit der Entfernung $r$ ändert, und der Totalwerth dieses Integrales ist folglich gleich Null. Es ist also nicht blos die von den Molekularwirkungen herrührende Quantität Arbeit immer gleich Null, wenn die Entfernung $r$ konstant bleibt, sondern auch, wenn sich diese Entfernung ändert, aber denselben Werth wieder annimmt.

---

## Zweites Kapitel.

### Bewegung eines festen Körpers.

§. 35. Man betrachtet gegenwärtig die festen Körper allgemein als Verbindungen von Molekulen, welche zwar nicht mit einander in Berührung stehen, aber gegenseitige Wirkungen auf einander ausüben. Diese Hypothese führt in Beziehung auf die Bewegung und das Gleichgewicht der Körper zu einfachen Gesetzen, und die aus diesen theoretischen Gesetzen abgeleiteten Folgerungen werden durch die Beobachtung bestätigt.

#### Princip der Uebertragung oder Mittheilung der Arbeit bei der Bewegung eines festen Körpers.

Wir nehmen an, daß auf die Molekule eines Körpers verschiedene äußere Kräfte wirken, wie z. B. die Schwere, und die bei der gegenseitigen Berührung der Körper statt findenden Einwirkungen, welche letztern jedoch unmittelbar nur auf die an der Oberfläche, oder in einer geringen Tiefe unter derselben an der Berührungsstelle wirken. Während der Bewegung des Körpers kann jedes Molekul desselben als ein ganz freier materieller Punkt betrachtet werden, wenn man annimmt, daß außer den eben erwähnten Kräften auch die benachbarten Molekule darauf wirken, und diese Kräfte in Rechnung bringt. Diese letztern Wirkungen wollen wir innere gegenseitige Kräfte nennen, weil sich dieselben nach dem Principe der Gleichheit und Entgegengesetztheit der Wirkung und Gegenwirkung, wie bereits bemerkt worden, immer so gruppiren lassen, daß sie paarweise einander gleich und entgegengesetzt sind. Wenn man folglich alle innern und äußern Kräfte in Betracht zieht, welche auf ein Molekul von dem Gewichte $p$ wirken, so kann man darauf die in §. 23 aufgestellte Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$p \cdot \frac{\omega_1^2}{2g} - p \frac{\omega_0^2}{2g} = \Sigma \int \mathrm{P} ds - \Sigma \int \mathrm{P}' ds$$

anwenden, und wenn man für alle Molekule des Körpers ähnliche Gleichungen aufstellt und die entsprechenden Theile derselben zusammenaddirt; so erhält man die Gleichung:

$$\Sigma p \cdot \frac{\omega_1^2}{2g} - \Sigma p \cdot \frac{\omega_0^2}{2g} = \Sigma \int \mathbf{P} ds - \Sigma \int \mathbf{P}' ds,$$

worin sich das Zeichen $\Sigma$ im zweiten Theile nicht blos auf die Arbeit aller Tangentialkomponenten der auf jedes Molekul wirkenden Kräfte, sondern auch auf alle diese Molekul selbst erstreckt. In diesem zweiten Theile der Gleichung kommen sowohl die von den äußern, als die von den innern Kräften herrührenden Quantitäten Arbeit vor. Wenn aber in der Voraussetzung eines festen Körpers die gegenseitigen Entfernungen seiner Molekule ungeändert bleiben, so sind die von den innern Kräften herrührenden Quantitäten Arbeit nach §. 34 gleich Null, und es bleiben folglich in dem zweiten Theile der Gleichung der lebendigen Kräfte nur die Quantitäten Arbeit übrig, welche von den äußern Kräften herrühren, wie die Gewichte der Molekule und die von den Berührungen des betrachteten Körpers mit andern Körpern herrührenden Wirkungen. Später werden wir die Möglichkeit und die Mittel zur Berechnung der von diesen letzten Kräften herrührenden Quantitäten Arbeit näher nachweisen, und für den Augenblick mag die Aufstellung des folgenden Principes genügen, nämlich: daß bei der Bewegung eines festen Körpers, dessen Molekule dieselben gegenseitigen Abstände von einander behalten, das Princip der Uebertragung oder Mittheilung der Arbeit, wie für einen einzelnen materiellen Punkt statt findet, d. h. die Zunahme der Summe der lebendigen Kräfte zwischen zwei beliebigen Augenblicken der Bewegung ist gleich der Differenz zwischen der Bewegungs- und Widerstandsarbeit der auf den Körper wirkenden äußern Kräfte.

### Gleichungen der Bewegung eines freien festen Körpers.

§. 36. Wenn man die Bewegung eines festen Körpers vollständig bestimmen will, so ist die Gleichung der lebendigen Kräfte, worin das vorhergehende Princip enthalten ist, im Allgemeinen zur Auflösung dieser Aufgabe nicht hinreichend. Denn denkt man sich drei rechtwinklige, mit dem Körper fest verbundene Koordinatenaxen, so ist zur vollständigen Bestimmung der Bewegung dieses Körpers erforderlich, daß man jeden Augenblick die Richtung dieser beweglichen Axen, so wie die Lage ihres beweglichen Anfangspunktes gegen drei feste Koordinatenaxen kennt, wozu aber erfordert wird, daß man die Werthe sechs veränderlicher Größen, nämlich die Koordinaten des beweglichen Anfangspunktes, ferner den Winkel $\vartheta$, welchen die bewegliche Ebene der $xy$ mit der festen Ebene der $\boldsymbol{xy}$ bildet, dann den Winkel $\varepsilon$, welchen ihr Durchschnitt mit der Axe der $x$ bildet, und den Winkel $\chi$ kennt, welchen derselbe Durchschnitt mit der Axe der $x_1$ bildet.

Man kann auch auf eine andere Weise zeigen, daß, wenn die Lage des beweglichen Anfangspunktes bestimmt ist, die Richtung der beweglichen Axen nur von drei Veränderlichen abhängt; denn die neun Kosinusse der Winkel, welche die beweglichen Axen mit den festen Axen bilden, sind durch sechs Bedingungsgleichungen miteinander verbunden (§. 28) und es bleiben folglich nur noch drei dieser Kosinusse zu bestimmen.

Da die Lage des Körpers also von sechs Veränderlichen abhängt; so sind zur vollständigen Kenntniß seiner Bewegung sechs Gleichungen erforderlich, welche die Werthe dieser sechs Veränderlichen als Funktionen der Zeit geben können. In der folgenden Untersuchung wollen wir der Kürze wegen $x$, $y$, $z$ für $x_1$, $y_1$, $z_1$ setzen, indem sich diese Koordinaten auf ein festes Axensystem beziehen. Um die eben erwähnten sechs Gleichungen zu erhalten, wollen wir zunächst bemerken, daß man, wenn die innern Kräfte mit in Rechnung gebracht werden, so daß jedes Molekul als völlig frei betrachtet werden kann, wenn $p$ das Gewicht irgend eines dieser Molekule, $x$, $y$, $z$ seine Koordinaten in Beziehung auf feste Axen, F irgend eine der darauf wirkenden äußern, oder innern Kräfte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Richtung dieser Kraft mit den festen Axen bildet, und endlich $u$, $v$, $w$ die Komponenten der Geschwindigkeit dieses Molekules nach diesen Axen bezeichnen, nach §. 17 setzen kann:

$$
(\mathrm{D}) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt} &= \Sigma \mathrm{F} \cos \alpha, \\
\frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt} &= \Sigma \mathrm{F} \cos \beta, \\
\frac{p}{g} \cdot \frac{dw}{dt} &= \Sigma \mathrm{F} \cos \gamma.
\end{aligned} \right.
$$

Diese drei Gleichungen können durch eine einzige ersetzt werden, woraus sie sich einzeln wieder ableiten lassen, wenn man den Begriff der virtuellen Momente in Anwendung bringt. Man sieht leicht ein, daß das Molekul in irgend einer Richtung eine sehr kleine Verrückung $\delta s$ erfahren kann, welche von der ganz unabhängig ist, die es bei der in Rede stehenden Bewegung wirklich erfährt. Man projicire alle Kräfte F, so wie ihre Resultante auf die Richtung von $\delta s$ und multiplicire diese Projektionen durch das Element $\delta s$, d. h. man bilde die virtuellen Momente oder die Elemente der virtuellen Arbeit, welche der sehr kleinen Verrückung $\delta s$ des Molekules entsprechen.

Bezeichnet man nun mit $\Phi$ die Beschleunigung:

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2},$$

welche von der Kraft herrührt, die die statt findende Bewegung allein hervorbringen würde, und welche wir die Totalkraft genannt haben, deren Komponenten nach den Axen folgende sind:

$$\frac{p}{g}\frac{du}{dt},\quad \frac{p}{g}\frac{dv}{dt},\quad \frac{p}{g}\frac{dw}{dt};$$

so ist die Resultante der Kräfte F nichts anders, als diese Totalkraft, und wird durch das Produkt aus der Masse $\frac{p}{g}$ des Moleküles und aus dieser Beschleunigung $\Phi$ gemessen. Bezeichnet man folglich durch $(\widehat{\Phi\delta s})$ den Winkel, welchen die Beschleunigung $\Phi$ oder die Totalkraft F mit der Richtung von $\delta s$ bildet, und durch $(\widehat{F\delta s})$ den Winkel, welchen eine dieser Kräfte F mit derselben Richtung bildet; so hat man nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 32):

$$\frac{p}{g}.\Phi\cos(\widehat{\Phi\delta s}).\delta s=\Sigma F\cos(\widehat{F\delta s}).\delta s.$$

welches die verlangte Gleichung ist. Läßt man darin den gemeinschaftlichen Faktor $\delta s$ hinweg, und läßt dann die willkürliche Richtung von $\delta s$ successive mit jeder der Axen zusammenfallen; so erhält man umgekehrt die drei Gleichungen (D).

Bildet man nun für jedes Molekul des Körpers eine ähnliche Gleichung, und addirt die entsprechenden Theile aller dieser Gleichungen zusammen, so erhält man:

$$\text{(E)}\qquad \Sigma\frac{p}{g}\Phi\cos(\widehat{\Phi\delta s}).\delta s=\Sigma F\cos(\widehat{F\delta s}).\delta s,$$

wo sich das Zeichen $\Sigma$ im zweiten Theile dieser Gleichung jetzt nicht blos auf alle auf dasselbe Molekul wirkenden Kräfte F, sondern auch auf alle Molekule des Körpers erstreckt. Aus dieser Gleichung wollen wir nun die zur vollständigen Bestimmung der Bewegung des Körpers erforderlichen sechs Gleichungen ableiten.

Zunächst wollen wir bemerken, daß das Vorhergehende auf ein beliebiges System freier Molekule anwendbar ist, und daß aus diesem Grunde die virtuellen Verrückungen $\delta s$ völlig willkürlich geblieben sind, und ganz unabhängig von einander sein können. Aber wenn wir die Untersuchung auf den Fall eines festen Körpers beschränken und zugleich annehmen wollen, daß die Verrückungen mit dem festen Zustande des Körpers oder der Unveränderlichkeit der gegenseitigen Entfernungen seiner Molekule verträglich sind; so verschwinden alle den innern Wirkungen entsprechenden Elemente der virtuellen Arbeit (§. 34) und es bleiben nur die, welche sich auf die äußern Kräfte beziehen, und folglich ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten anwendbar, wenn man nur diese Kräfte betrachtet.

Aus der allgemeinen Gleichung (E) kann man eine sehr einfache specielle Gleichung ableiten, wenn man eine virtuelle Verrückung so annimmt, daß alle Molekule parallel zu einer beliebigen Axe, z. B. zu der Axe der $x$, um dieselbe unendlich kleine Größe vorrücken; denn da alsdann die Beschleunigung $\Phi$ auf die Axe der $x$ projicirt wird, so ist ihre Projektion $= \frac{du}{dt}$, der Winkel $(\widehat{F\delta s}) = \alpha$, und wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $\delta s$ hinwegläßt; so kommt:

$$\Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt} = \Sigma F \cos \alpha,$$

wo sich das Zeichen $\Sigma$ im zweiten Theile dieser Gleichung auf alle auf dasselbe Molekul wirkende äußere Kräfte und auch auf alle Molekule erstreckt.

Verfährt man ebenso in Beziehung auf die beiden andern Axen, so erhält man die drei Gleichungen:

$$\text{(F)} \qquad \begin{cases} \Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt} = \Sigma F \cos \alpha, \\ \Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \Sigma F \cos \beta, \\ \Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{dw}{dt} = \Sigma F \cos \gamma. \end{cases}$$

Man würde übrigens diese Gleichungen direkt erhalten haben, wenn man für jedes Molekul eine Reihe ähnlicher Gleichungen, wie die Gleichungen (D) gebildet und die korrespondirenden Theile derselben zusammenaddirt hätte. Wenn wir die Betrachtung virtueller Verrückungen eingemischt haben, so ist dieses lediglich deshalb geschehen, um auf einen zusammengesetzteren Fall, wo sie mit Vortheil angewandt werden kann, vorzubereiten.

Wenn man sich erinnert, daß die Kraft $\frac{p}{g} . \Phi$, deren Componenten nach den Axen resp. folgende sind:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt}, \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt}, \frac{p}{g} \cdot \frac{dw}{dt}$$

genau diejenige ist, welche wir früher die **Totalkraft** genannt haben; so kann man die vorhergehenden Gleichungen (F) in Worten ausdrücken, wenn man sagt: **daß die Summen der Projektionen der äußern Kräfte auf drei rechtwinklige Axen den Summen der Projektionen der Totalkräfte auf dieselben Axen gleich sind.**

Aus der Gleichung (E) kann man auch eine sehr einfache Gleichung ableiten, wenn man eine virtuelle Verrückung wählt, welche von einer unendlich kleinen Rotation um eine beliebige Axe, z. B. um die Axe der $x$, herrührt. Denn wenn $\delta\psi$ den unendlich kleinen Winkel bezeichnet, welchen das von einem beliebigen Molekule des Systemes auf die Rotationsaxe gefällte Perpendikel beschreibt, so hat man für das Element der virtuellen Arbeit der auf dieses Molekul wirkende Kraft **F**:

$$\mathbf{F}\cos(\widehat{\mathbf{F}\delta s}) . r\delta\psi,$$

und die Gleichung (E) verwandelt sich in folgende:

$$\Sigma \frac{p}{g} . \Phi \cos(\widehat{\Phi\delta s}) . r\delta\psi = \Sigma\mathbf{F}\cos(\widehat{\mathbf{F}\delta s}) . r\delta\psi.$$

Da der Faktor $\delta\psi$ allen Gliedern gemeinschaftlich ist, weil die Bewegung die Drehung eines festen Körpers um eine Axe ist; so erhält man, wenn man diesen gemeinschaftlichen Faktor hinwegläßt:

$$\text{(G)} \qquad \Sigma \frac{p}{g} . \Phi \cos(\widehat{\Phi\delta s}) . r = \Sigma\mathbf{F}\cos(\widehat{\mathbf{F}\delta s}) . r.$$

Für die Rotationsbewegung um die beiden andern Axen erhielte man zwei Gleichungen von ähnlicher Form, die aber wirklich von einander verschieden sind, so daß man folglich die zur vollständigen Bestimmung der Bewegung des Körpers erforderlichen sechs Gleichungen hat.

Wenn eine Kraft in zwei andere, aufeinander senkrechte Kräfte zerlegt wird, wovon die eine in einer durch die Axe gelegten Ebene liegt, und die andere auf dieser Ebene senkrecht ist; so wird diese letztere durch $\mathbf{F}\cos(\widehat{\mathbf{F}\delta s})$ ausgedrückt, weil ihre Richtung die von $\delta s$ ist. In der Mechanik nennt man aber das Produkt aus einer Kraft und aus ihrer Entfernung von einer Axe das **Moment dieser Kraft in Beziehung auf diese Axe**, und da die Richtung von $\delta s$, welche die der letzten Komponente ist, auf dem Halbmesser $r$ senkrecht steht; so mißt dieser Halbmesser ihre Entfernung von der Rotationsaxe, welche auf dem Halbmesser $r$ senkrecht ist, und folglich ist das Produkt

$F\cos(F\delta s).r$ das Moment der Kraft **F** in Beziehung auf die Rotationsaxe. Die drei Gleichungen von der Form (G) drücken also aus: daß die Summen der Momente der äußern Kräfte in Beziehung auf drei rechtwinklige Axen den Summen der Momente der Totalkräfte in Beziehung auf dieselben Axen gleich sind.

Zur Vollendung der Auflösung unserer Aufgabe hätten wir nun blos noch die Größen $u$, $v$, $w$, etc. als Funktionen der sechs Veränderlichen, wovon die Bewegung des Systemes abhängt, nämlich der Koordinaten des beweglichen Anfangspunktes und der drei Winkel $\vartheta$, $\varepsilon$, $\chi$, welche die Richtung der beweglichen Axen gegen die festen Axen bestimmen, auszudrücken, dann die sechs Differenzialgleichungen, welche man zwischen der Zeit und den Differenzialen dieser sechs Veränderlichen erhielte, zu integriren, und die willkürlichen Konstanten nach dem als bekannt vorausgesetzten anfänglichen Zustande der Bewegung zu bestimmen.

Da die in Rede stehenden sechs Veränderlichen also als Funktionen der Zeit durch ebensoviele verschiedene Gleichungen gegeben werden, so ist die Lage des Systemes jeden Augenblick vollständig bestimmt, woraus folgt, daß jede andere Gleichung, welche man durch eine neue Wahl virtueller Verrückungen aus der Gleichung (E) ableiten könnte, nothwendig auf eine der Gleichungen (F) und (G) zurückkommen, oder sich aus ihrer Verbindung ableiten lassen müßte.

§. 97. Die aus den Gleichungen (E) durch die Betrachtung einer virtuellen Rotationsbewegung abgeleiteten Gleichungen (G) lassen sich auch unter einer andern Form darstellen. Denn wir haben gesehen, daß man bei der Berechnung der Elemente der Arbeit für die Quantität Arbeit einer Resultante die Summe der Quantitäten Arbeit ihrer Komponenten setzen kann. Wenn also **X**, **Y**, **Z** die Komponenten der Kraft **F** nach den Axen und $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ die von der betrachteten virtuellen Verrückung herrührenden unendlich kleinen Zunahmen der Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft **F** bezeichnen, so sind $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$ die Elemente der Arbeit der drei Komponenten, und man hat:

$$F\cos(F\delta s)\,\delta s = X\delta y + Y\delta y + Z\delta z\,,$$

und da aus einem ähnlichen Grunde die Komponenten der Kraft $\frac{p}{g}\Phi$ folgende sind:

$$\frac{p}{g}\frac{du}{dt},\ \frac{p}{g}\frac{dv}{dt},\ \frac{p}{g}\frac{dw}{dt};$$

so hat man:

$$\frac{p}{g}\,.\,\Phi\cos(\Phi\delta s).\,\delta s=\frac{p}{g}\,.\,\frac{du}{dt}\,\delta x+\frac{p}{g}\,.\,\frac{dv}{dt}\,\delta y+\frac{p}{g}\,.\,\frac{dw}{dt}\,\delta z.$$

Wenn man zunächst die von einer Rotationsbewegung um die Axe der $z$ herrührenden virtuellen Verrückungen betrachtet, $\delta\psi$ wieder den von dem auf der Axe senkrechten Radiusvektor $r$ beschriebenen unendlich kleinen Winkel bezeichnet, und die Bewegung von der Axe der positiven $x$ gegen die der positiven $y$ statt findet; so hat man:

$$\delta z=0,\ \delta y=\delta s\,\frac{x}{r}=x\delta\psi,\ \ \delta x=-\delta s\,\frac{y}{r}=-y\delta\psi,$$

weil $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ die Kosinus der Winkel sind, welche der Radiusvektor $r$ mit den Axen der $x$, $y$ bildet, oder die Sinus der Winkel, welche derselbe Radiusvektor mit den Axen der $y$, $x$ macht, und $\delta s=r\delta\psi$ ist.

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (E) in folgende:

(H)

$$\Sigma\,\frac{p}{g}\left(x\,\frac{dv}{dt}-y\,\frac{du}{dt}\right)=\Sigma\,(x\mathbf{Y}-y\mathbf{X}),$$

und für die virtuellen Rotationsbewegungen um die beiden andern Axen fände man ebenso:

$$\Sigma\,\frac{p}{g}\left(y\,\frac{dw}{dt}-z\,\frac{dv}{dt}\right)=\Sigma\,(y\mathbf{Z}-z\mathbf{Y}),$$

$$\Sigma\,\frac{p}{g}\left(z\,\frac{du}{dt}-x\,\frac{dw}{dt}\right)=\Sigma\,(z\mathbf{X}-x\mathbf{Z}).$$

Unter dieser Form pflegt man gewöhnlich die drei Gleichungen der Bewegung anzugeben, welche die Gleichheit zwischen den Summen der Momente der beiden betrachteten Arten von Kräften, nämlich der äußern und der Totalkräfte ausdrücken, welche jedem Punkte die Bewegung ertheilen können, die derselbe wirklich annimmt. Die Aufgabe ist durch das System der Gleichungen (**F**) und (**H**) vollständig gelöst, wenn man die Größen $u$, $v$, $w$, $x$, $y$, $z$, etc. als Funktionen der sechs Veränderlichen ausgedrückt hat, wovon die Lage des Systemes abhängt.

## Princip über die Bewegung des Schwerpunktes eines festen Körpers.

§. 38. Unter dem Schwerpunkte eines Systemes materieller Punkte versteht man einen zwischen ihnen liegenden Punkt von solcher Beschaffenheit, daß, wenn $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Koordinaten desselben und $x$, $y$, $z$ die eines beliebigen materiellen Punktes des Systemes bezeichnen, man die Gleichungen hat:

$$(h) \qquad \xi = \frac{\Sigma px}{\Sigma p}, \quad \eta = \frac{\Sigma py}{\Sigma p}, \quad \zeta = \frac{\Sigma pz}{\Sigma p},$$

woraus folgt, wenn man die Nenner fortschafft, daß die Summe der Produkte, welche man erhält, wenn man das Gewicht eines jeden materiellen Punktes mit seiner Entfernung von einer der Koordinatenebenen multiplicirt, dem Produkte aus dem Totalgewichte des Systemes und der Entfernung des Schwerpunktes von derselben Ebene gleich ist.

Wenn man die Komponenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes, d. h. die Größen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ resp. mit **U, V, W** bezeichnet; so man:

$$\mathbf{U} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\Sigma p \frac{dx}{dt}}{\Sigma p} = \frac{\Sigma pu}{\Sigma p}, \text{ folglich } \frac{d\mathbf{U}}{dt} \Sigma p = \Sigma p \frac{du}{dt},$$

und:

$$\mathbf{V} = \frac{\Sigma pv}{\Sigma p}, \text{ folglich } \frac{d\mathbf{V}}{dt} \Sigma p = \Sigma p \frac{dv}{dt},$$

$$\mathbf{W} = \frac{\Sigma pw}{\Sigma p}, \text{ folglich } \frac{d\mathbf{W}}{dt} \Sigma p = \Sigma p \frac{dw}{dt},$$

und wenn man bemerkt, daß:

$$\mathbf{F} \cos \alpha = \mathbf{X}, \quad \mathbf{F} \cos \beta = \mathbf{Y}, \quad \mathbf{F} \cos \gamma = \mathbf{Z}$$

ist, so verwandeln sich die Gleichungen (**F**) in folgende:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{d\mathbf{U}}{dt} \Sigma \frac{p}{g} = \Sigma \mathbf{X}, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} \Sigma \frac{p}{g} = \Sigma \mathbf{Y}, \quad \frac{d\mathbf{W}}{dt} \Sigma \frac{p}{g} = \Sigma \mathbf{Z},$$

welche nur noch die drei Veränderlichen **U, V, W**, oder die Koordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, wovon diese abhängen, enthalten und ausdrücken: daß sich der Schwerpunkt eines festen Körpers gerade wie ein einzelner materieller Punkt bewegt, dessen Gewicht dem Totalgewichte des Systemes oder Körpers gleich ist, und auf welchen alle parallel zu sich selbst in diesen Punkt verlegten auf den Körper wirkenden äußern Kräfte wirken; denn diese Gleichungen haben dieselbe Form, als die Gleichungen (**D**) für die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes.

Später werden wir sehen, daß dieser Satz nicht blos für die Bewegung eines einzelnen festen Körpers, sondern unter gewissen

Bedingungen der Freiheit der Bewegung im Allgemeinen auch für ein beliebiges System fester Körper gilt, und unter der Benennung: **Princip der Bewegung des Schwerpunktes** bekannt ist.

Aus diesem Principe folgt: daß, wenn der Schwerpunkt eine geradlinige und gleichförmige Bewegung hat, die äußern Kräfte den Bedingungen des Gleichgewichtes genügen müssen, und daß umgekehrt, wenn diese Bedingungen erfüllt werden, die Bewegung des Schwerpunktes geradlinig und gleichförmig ist. Denn im ersten Falle verschwinden bekanntlich die ersten Theile der Gleichungen (I), folglich auch die zweiten Theile derselben, und diese Gleichungen drücken alsdann aus, daß die parallel zu sich selbst in den Schwerpunkt verlegten äußern Kräfte eine Resultante $= 0$ haben, oder daß diese in den Schwerpunkt verlegten Kräfte einander das Gleichgewicht halten. Im zweiten Falle werden bekanntlich die zweiten Theile der erwähnten Gleichungen $= 0$, folglich auch die ersten Theile derselben, und mithin hat der Schwerpunkt eine geradlinige gleichförmige Bewegung.

Aus den Gleichungen ($h$), welche die Koordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ des Schwerpunktes bestimmen, erhellet, daß dieser Punkt in dem Körper eine feste oder unveränderliche Lage hat, und wenn man für einen gegebenen Augenblick die Lage und Geschwindigkeit dieses Punktes kennt; so geben die Gleichungen (I) diese Lage und Geschwindigkeit für einen beliebigen Augenblick. Zur vollständigen Bestimmung der Bewegung des festen Körpers hat man folglich blos noch die Rotationsbewegung desselben um seinen Schwerpunkt zu bestimmen, und obgleich wir hier nicht in alle Einzelnheiten der Auflösung dieser Aufgabe eingehen können; so wollen wir doch wenigstens die Möglichkeit dieser Auflösung zu zeigen suchen.

Zu dem Zwecke kann man zunächst die sich auf einen festen Anfangspunkt beziehenden Koordinaten $x$, $y$, $z$ in andere Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ verwandeln, welche sich auf den zum Anfangspunkte eines Systemes beweglicher zu den ersten paralleler Axen genommenen Schwerpunkt beziehen, und zu diesem Behufe $\xi + x'$, $\eta + y'$, $\zeta + z'$, resp. für $x$, $y$, $z$, so wie $\mathrm{U} + u'$, $\mathrm{V} + v'$, $\mathrm{W} + w'$ resp. für $u$, $v$, $w$ setzen, wo $u'$, $v'$, $w'$ die Komponenten der Geschwindigkeit in Beziehung auf die beweglichen Axen nach diesen Axen bezeichnen.

Da der Schwerpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ ist, so hat man nach den durch die Gleichungen ($h$) gegebenen Werthen von $\xi$, $\eta$, $\zeta$:

$$\Sigma p x' = 0, \ \Sigma p y' = 0, \ \Sigma p z' = 0,$$

und mithin, wenn man in Beziehung auf die Zeit differenzirt:

$$\Sigma p u' = 0, \quad \Sigma p v' = 0, \quad \Sigma p w' = 0,$$

folglich:

$$\Sigma p \frac{du'}{dt} = 0, \quad \Sigma p \frac{dv'}{dt} = 0, \quad \Sigma p \frac{dw'}{dt} = 0.$$

Vermittelst dieser Relationen und der Gleichungen (I) reduciren sich die Gleichungen (H) auf:

$$(\mathrm{J}) \qquad \begin{cases} \Sigma \frac{p}{g}\left(x' \frac{dv'}{dt} - y' \frac{du'}{dt}\right) = \Sigma\,(x'\mathrm{Y} - y'\mathrm{X}), \\ \Sigma \frac{p}{g}\left(y' \frac{dw'}{dt} - z' \frac{dv'}{dt}\right) = \Sigma\,(y'\mathrm{Z} - z'\mathrm{Y}), \\ \Sigma \frac{p}{g}\left(z' \frac{du'}{dt} - x' \frac{dw}{dt}\right) = \Sigma\,(z'\mathrm{X} - x'\mathrm{Z}). \end{cases}$$

Da diese Gleichungen keine Veränderlichen enthalten, welche sich auf den Schwerpunkt beziehen, sondern blos solche Veränderliche, die sich auf die durch den Schwerpunkt gehenden beweglichen Axen beziehen; so folgt daraus: daß die Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt eben so bestimmt wird, wie wenn dieser Schwerpunkt fest wäre.

In diesen letzten Gleichungen müßte man nun alle Veränderliche, deren Anzahl das Dreifache der Anzahl der Molekule ist, durch drei unabhängige Größen ausdrücken, welche die Lage des Körpers bestimmen, wie z. B. die drei schon erwähnten Winkel $\vartheta$, $\varepsilon$, $\chi$. Da aber diese Analyse etwas komplicirt ist, so wollen wir hier nicht weiter darauf eingehen, zumal da es für uns in der Folge genügt, gezeigt zu haben, daß die Bewegung des Körpers davon abhängt, wermittelst der sechs Gleichungen (I) und (J) sechs Veränderliche als Funktionen der Zeit zu bestimmen.

Zum Schlusse wollen wir noch bemerken, daß die durch die Gleichungen (J) ausgedrückte Rotationsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt nicht geändert würde, wenn man in das System der Kräfte noch andere durch diesen Schwerpunkt gehende Kräfte einführte. Dieses folgt aus der Form der zweiten Theile dieser Gleichungen, und daraus, daß die Koordinaten des Schwerpunktes, auf welchen die neuen Kräfte nach der Voraussetzung wirken sollen, in Beziehung auf die Axen der $x'$, $y'$, $z'$ Null sind. Hieraus folgt ferner, daß die relative Rotationsbewegung um den Schwerpunkt nicht geändert würde, wenn man auf diesen Schwerpunkt Kräfte wirken ließe, wodurch derselbe im Zustande der Ruhe erhalten würde.

## Gleichgewicht und Aequivalenz der auf einen festen Körper wirkenden Kräfte.

§. 39. Man sagt: daß die auf einen festen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, wenn sie diesem als ruhend vorausgesetzten Körper weder irgend eine Bewegung ertheilen, noch, wenn er sich bereits bewegt, diese Bewegung verändern können.

Wir wollen den allgemeinsten Fall betrachten, wo der Körper bereits eine gewisse Bewegung hat, und annehmen, daß an demselben ein neues System von Kräften angebracht werde. Es bezeichne $\mathbf{F}_1$ irgend eine dieser neuen Kräfte und $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Z}_1$ seien die Komponenten derselben nach den Axen; so müssen diese Kräfte in die zweiten Theile der Gleichungen (F) und (H) oder (J) eingeführt werden, welche alsdann die Bewegung des Körpers unter der Wirkung der ursprünglichen Kräfte und der neuen eingeführten Kräfte $\mathbf{F}_1$ ausdrücken. Soll nun diese Bewegung mit der ursprünglichen identisch sein, d. h. sollen die Kräfte $\mathbf{F}_1$ im Gleichgewichte sein; so ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß die sich auf diese Kräfte beziehenden Summen in den zweiten Theilen der angeführten Gleichungen von selbst verschwinden, wodurch man die folgenden sechs Bedingungsgleichungen erhält:

$$\Sigma\mathbf{X}_1 = 0,\quad \Sigma\mathbf{Y}_1 = 0,\quad \Sigma\mathbf{Z}_1 = 0,$$
$$\Sigma(x\mathbf{Y}_1 - y\mathbf{X}_1) = 0,\quad \Sigma(y\mathbf{Z}_1 - z\mathbf{Y}_1) = 0,\quad \Sigma(z\mathbf{X}_1 - x\mathbf{Z}_1) = 0,$$

welche für das Gleichgewicht der Kräfte $\mathbf{F}_1$ nothwendig, aber auch hinreichend sind. Die Indices kann man der Kürze wegen hinweglassen, und alsdann hat man für das Gleichgewicht eines beliebigen auf einen festen Körper wirkenden Systemes von Kräften $\mathbf{F}$ die sechs Relationen:

$$\Sigma\mathbf{X} = 0,\quad \Sigma\mathbf{Y} = 0,\quad \Sigma\mathbf{Z} = 0,$$
$$\Sigma(x\mathbf{Y} - y\mathbf{X}) = 0,\quad \Sigma(y\mathbf{Z} - z\mathbf{Y}) = 0,\quad \Sigma(z\mathbf{X} - x\mathbf{Z}) = 0.$$

Die drei ersten drücken aus: daß die Summen der Komponenten nach drei beliebigen rechtwinkligen Axen Null sind, wo die nach einem bestimmten Sinne, z. B. nach dem der positiven Koordinaten, gerichteten Komponenten als positiv und die nach dem entgegengesetzten Sinne gerichteten als negativ betrachtet werden.

Um die drei letzten der vorhergehenden Gleichungen auf eine einfache Weise ausdrücken zu können, bemerke man zunächst, daß der Anfangspunkt der Koordinaten $x$, $y$, $z$ ganz beliebig ist, und wenn man ferner mit $\mathbf{F}'$ die Projektion der Kraft $\mathbf{F}$ auf die Ebene der $xy$, mit $r'$ die Entfernung des Anfangspunktes von dieser

Projektion und mit $\alpha$ den Winkel bezeichnet, welchen diese Projektion mit der Axe der $x$ bildet; so hat man:

$$X = F' \cos\alpha, \quad Y = -F' \sin\alpha, \quad x = r' \sin\alpha, \quad y = r' \cos\alpha,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$yX - xY = F'r':$$

Nun ist aber $F'r'$ das **Moment** der Kraft F in Beziehung auf die Axe der $z$, und ist in der That gleich dem Produkte aus der Entfernung $r'$ der Axe der $z$ von dem Angriffspunkte der Kraft F und aus der Komponente, welche auf der durch diese Axe und durch diesen Angriffspunkt gehenden Ebene normal ist. Wir haben aber bereits in §. 36 bemerkt, daß dieses letzte Produkt das **Moment der Kraft F in Beziehung auf die Axe der $z$** genannt wird, und ebenso sind die Größen $yZ - zY$, $zX - xZ$, mit dem gehörigen Zeichen genommen, resp. die Momente der Kraft F in Beziehung auf die Axe der $x$ und der $y$. Die drei in Rede stehenden Gleichungen drücken also aus: **daß für den Fall des Gleichgewichtes die Summen der Momente der Kräfte in Beziehung auf drei beliebige rechtwinklige Axen gleich Null sind, wo diese Momente als positiv angesehen werden, wenn die betrachtete Kraft den Körper um die Axe, worauf sich diese Momente beziehen, nach einem bestimmten Sinne zu drehen strebt, und als negativ, wenn sie eine Drehung in dem entgegengesetzten Sinne zu bewirken sucht.**

§. 40. Man sagt: daß zwei, successive auf denselben Körper wirkende Systeme von Kräften **äquivalent** oder **gleichbedeutend** sind, wenn sie diesem Körper dieselbe Bewegung ertheilen, oder ertheilen können. Die Bedingungen aber, welche erforderlich und zureichend sind, damit die Bewegung dieselbe sei, bestehen darin, daß die zweiten Theile der Gleichungen (J) und (H), welche die Bewegung des Körpers bestimmen, in beiden Fällen einander gleich sind. Wenn X, Y, Z die Komponenten irgend einer der Kräfte des ersten Systemes und X′, Y′, Z′ die Komponenten irgend einer der Kräfte des zweiten Systemes bezeichnen, deren Angriffspunkt die Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ hat; so hat man folglich die Relationen:

$$\Sigma X = \Sigma X', \quad \Sigma Y = \Sigma Y', \quad \Sigma Z = \Sigma Z',$$

$$\Sigma(xY - yX) = \Sigma(x'Y' - z'X'), \; \Sigma(yZ - zY) = \Sigma(y'Z' - z'Y'),$$

$$\Sigma(zX - xZ) = \Sigma(X'y' - x'Z').$$

Aus den drei ersten dieser Gleichungen folgt, daß die algebraischen Summen der Komponenten nach den Axen in beiden Systemen gleich sind, und aus den drei letzten Gleichungen erhellet, daß die Summe der Momente der Kräfte beider Systeme in Beziehung auf drei rechtwinklige Axen ebenfalls einander gleich sind.

Da die sechs Gleichungen für die Bewegung eines festen Körpers durch die Betrachtung der virtuellen Geschwindigkeiten erhalten sind, so ist klar, daß man durch dasselbe Verfahren auch die Gleichungen des Gleichgewichtes oder der Aequivalenz der Kräfte direkt hätte erhalten können.

Wenn man z. B. auf diese Weise die Gleichungen für das Gleichgewicht ableiten will, so geht man von der allgemeinen Gleichung (E) in §. 36 aus, welche sich auf das Gleichgewicht eines Molekules bezieht, und ausdrückt, daß die Summe der Elemente der virtuellen Arbeit, oder der virtuellen Momente der auf dieses Molekul wirkenden Kräfte gleich Null ist, bildet für alle Molekule eine Reihe ähnlicher Gleichungen, deren entsprechende Theile man zusammenaddirt, beschränkt die virtuellen Bewegungen auf die mit dem festen Zustande des betrachteten Körpers verträglichen, wodurch die den Molekularkräften entsprechenden Arbeitselemente von selbst verschwinden, so daß nur die den äußern Kräften entsprechenden übrig bleiben, und endlich nimmt man von den virtuellen Bewegungen, welche der feste Körper annehmen kann, die drei zu den Axen parallelen unendlich kleinen fortschreitenden Bewegungen und die drei um diese Axen stattfindenden Rotationsbewegungen; so gelangt man zu den weiter oben gefundenen sechs Gleichungen.

Wenn man durch dasselbe Verfahren die Gleichungen der Aequivalenz erhalten wollte, so müßte man vorher aus der Gleichung (E) eine allgemeine Bedingung der Aequivalenz zwischen zwei auf dasselbe Molekul wirkenden Systemen von Kräften ableiten, und dann mit der so transformirten Gleichung eben so operiren, um die sechs Gleichungen der Aequivalenz zu erhalten, wie man mit der Gleichung (E) operiren würde, um die sechs Gleichungen des Gleichgewichtes zu erhalten.

### Resultante eines Systemes paralleler Kräfte. — Mittelpunkt paralleler Kräfte. — Schwerpunkt.

§. 41. Sehr oft hat man ein auf einen festen Körper wirkendes System paralleler Kräfte zu betrachten, und die Richtung sowohl, als die Größe einer einzigen Kraft zu bestimmen, welche mit diesem Systeme von Kräften aequivalent oder gleichbedeutend ist.

Es sei **P** irgend eine der parallelen Kräfte und **R** die eine Kraft, welche dem Systeme der Kräfte **P** aequivalent ist, und deshalb ihre Resultante genannt wird. Ferner seien $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel, welche die gemeinschaftliche Richtung dieser Kräfte **P** mit drei rechtwinkligen Axen bildet, und $a$, $b$, $c$ seien die Winkel, welche die Resultante **R** mit denselben Axen bildet; so geben die drei ersten Gleichungen der Aequivalenz:

$$\mathbf{R}\cos a = \Sigma\mathbf{P}\cos\alpha,\ \mathbf{R}\cos b = \Sigma\mathbf{P}\cos\beta,\ \mathbf{R}\cos c = \Sigma\mathbf{P}\cos\gamma.$$

Im Allgemeinen wirken mehrere der Kräfte **P** nach einem gewissen Sinne und die andere im entgegengesetzten Sinne. Wir wollen annehmen, daß sich die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ auf die Kräfte beziehen, welche die größte Summe bilden, so muß man für diese $\cos.\alpha$, $\cos\beta$, $\cos.\gamma$ und für die anderen Kräfte dagegen $-\cos.\alpha$, $-\cos.\beta$, $-\cos.\gamma$ nehmen; aber da der absolute Werth dieser Kosinusse für beide Kategorien von Kräften derselbe ist, so kann man $\cos.\alpha$, $\cos\beta$, $\cos.\gamma$ aus dem Summenzeichen $\Sigma$ heraussetzen, und die der Kräfte **P**, welche in dem Sinne der größten Summen wirken, als positiv, dagegen die in dem entgegengesetzten Sinne wirkenden als negativ betrachten. Man hat folglich:

$$\mathbf{R}\cos a = \cos\alpha\Sigma\mathbf{P},\ \mathbf{R}\cos b = \cos\beta\Sigma\mathbf{P},\ \mathbf{R}\cos c = \cos\gamma\Sigma\mathbf{P},$$

und wenn man zum Quadrate erhebt, und die Resultate zusammenaddirt, so kommt:

$$\mathbf{R}^2 = (\Sigma\mathbf{P})^2 \text{ folglich } \mathbf{R} = \Sigma\mathbf{P},$$

weil die durch die Erhebung zum Quadrate eingeführte negative Auflösung unzulässig ist. Alsdann findet man:

$$\cos a = \cos\alpha,\quad \cos b = \cos\beta,\quad \cos c = \cos\gamma,$$

d. h. die Resultante **R** bildet mit den Axen dieselben Winkel, als die Kräfte **P**, ist folglich zu ihnen parallel, ferner ihrer algebraischen Summe gleich, und wirkt nach dem Sinne derer, deren absolute Summe am größten ist.

Es seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Koordinaten eines beliebigen, auf der Richtung der Resultante genommenen Punktes, so geben die drei letzten Bedingungen der Aequivalenz:

$$(\xi\mathbf{R}\cos b - \eta\mathbf{R}\cos a) = \Sigma(x\mathbf{P}\cos\beta - y\mathbf{P}\cos\alpha),$$
$$(\eta\mathbf{R}\cos c - \zeta\mathbf{R}\cos b) = \Sigma(y\mathbf{P}\cos\gamma - z\mathbf{P}\cos\beta),$$
$$(\zeta\mathbf{R}\cos a - \xi\mathbf{R}\cos c) = \Sigma(z\mathbf{P}\cos\alpha - x\mathbf{P}\cos\gamma).$$

oder vielmehr:

$$\mathrm{R}(\xi\cos b-\eta\cos a)=\cos\beta\Sigma\mathrm{P}x-\cos\alpha\Sigma\mathrm{P}y,$$
$$\mathrm{R}(\eta\cos c-\zeta\cos b)=\cos\gamma\Sigma\mathrm{P}y-\cos\beta\Sigma\mathrm{P}z,$$
$$\mathrm{R}(\zeta\cos a-\xi\cos c)=\cos\alpha\Sigma\mathrm{P}z-\cos\gamma\Sigma\mathrm{P}x.$$

Von diesen drei Gleichungen sind nur zwei von einander unabhängig, und es läßt sich z. B. die dritte aus den beiden andern ableiten, wenn man die erste mit $\cos.c$ oder $\cos.\gamma$, die zweite mit $\cos.a$ oder $\cos.\alpha$ multiplicirt, die Produkte zusammenaddirt und dann die resultirende Gleichung durch $\cos b$ oder $\cos.\beta$ dividirt. Soll folglich die Kraft **R**, deren Intensität und Richtung vorhin bestimmt ist, dem Systeme der Kräfte **P** völlig äquivalent sein; so genügt es, daß sie durch einen Punkt geht, dessen Koordinaten zweien der drei letzten Gleichungen genügen.

Diesen Gleichungen wird aber genügt, wenn man die Relationen hat:

$$\mathrm{R}\xi=\Sigma\mathrm{P}x,\quad \mathrm{R}\eta=\Sigma\mathrm{P}y,\quad \mathrm{R}\zeta=\Sigma\mathrm{P}z,$$

und zwar, welche gemeinschaftliche Richtung die Kräfte **P** und **R** auch haben mögen. Der Punkt, dessen Koordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ durch diese Gleichungen bestimmt werden, hat folglich die merkwürdige Eigenschaft, daß die Resultante der Kräfte **P** immer durch diesen Punkt geht, wenn auch diese Kräfte bei denselben Intensitäten und denselben Angriffspunkten ihre Richtung beliebig ändern, indem sie jedoch parallel unter sich bleiben, weshalb man diesen Punkt den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nennt.

Wenn die Kräfte **P** die Gewichte der Molekule des Körpers sind, so wird der Mittelpunkt der parallelen Kräfte der Schwerpunkt des Körpers genannt. Dieser Punkt, dessen Koordinaten durch die Formeln:

$$\xi=\frac{\Sigma\mathrm{P}x}{\Sigma\mathrm{P}},\ \eta=\frac{\Sigma\mathrm{P}y}{\Sigma\mathrm{P}},\ \zeta=\frac{\Sigma\mathrm{P}z}{\Sigma\mathrm{P}}$$

bestimmt werden, weil $\mathrm{R}=\Sigma\mathrm{P}$ ist, hat die Eigenschaft, daß die Resultante der Gewichte der Molekule des Körpers immer durch denselben gehen muß, wenn sich die Richtung dieser Gewichtskräfte gegen den Körper, oder was dasselbe ist, wenn sich die Lage des Körpers gegen die vertikale Richtung, welche zugleich die der Schwere ist, ändert. Durch diese Formeln wird die Definition des Schwerpunktes gerechtfertigt, welche wir bereits früher davon gegeben haben, als wir denselben blos als einen geometrischen Punkt betrachteten, dessen Lage durch die obigen Formeln bestimmt wurde.

Die Summen $\Sigma\mathrm{P}x$, $\Sigma\mathrm{P}y$, $\Sigma\mathrm{P}z$, welche die Zähler der Werthe von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ bilden, werden die Summen der Momente der Gewichte der Molekule des Körpers in Beziehung auf die Ebenen der $yz$, $xz$, $xy$ genannt.

Wenn der betrachtete Körper in allen seinen Theilen homogen ist, und folglich die Gewichte seiner Elemente ihrem Volumen proportional sind; so kann man, wenn V das gesammte Volumen des Körpers und $dv$ ein unendlich kleines Element dieses Volumens bezeichnet, setzen:

$$\xi = \frac{\Sigma x dv}{\mathrm{V}}, \; \eta = \frac{\Sigma y dv}{\mathrm{V}}, \; \zeta = \frac{\Sigma z dv}{\mathrm{V}},$$

wo die Summen $\Sigma xdv$, $\Sigma ydv$, $\Sigma zdv$ die Summen der Momente der Volumenelemente in Beziehung auf die Ebenen der $yz$, der $xz$ und der $xy$ genannt werden.

Um die Summation verrichten zu können, muß man im Allgemeinen $dxdydz$ für $dv$ und das Zeichen der dreifachen Integration in Beziehung auf die drei Veränderlichen $x$, $y$, $z$ für das Summenzeichen $\Sigma$ setzen. Aber wenn man annimmt, daß in jeder der vorhergehenden Formeln die beiden ersten Integrationen verrichtet sind, und man bezeichnet mit $\mathrm{U}_x$, $\mathrm{U}_y$, $\mathrm{U}_z$ die Flächen der Durchschnitte des Körpers mit Ebenen, welche resp. auf den Axen der $x$, der $y$, der $z$ senkrecht und um die Längen $x$, $y$, $z$ vom Anfangspunkte entfernt sind; so hat man:

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{U}_x x dx}{\mathrm{V}}, \quad \eta = \frac{\int_{y_0}^{\mathrm{Y}} \mathrm{U}_y y dy}{\mathrm{V}}, \quad \zeta = \frac{\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \mathrm{U}_z z dz}{\mathrm{V}},$$

wo die Integrationsgrenzen $x_0$ und $\mathrm{X}$, $y_0$ und $\mathrm{Y}$, $z_0$ und $Z$ die Koordinaten oder die Entfernungen der den Körper begrenzenden Ebenen vom Anfangspunkte sind. Man darf hierbei jedoch nicht vergessen, daß die Koordinaten $x$, $y$, $z$ in diesen Formeln mit dem entsprechenden Zeichen genommen werden müssen, und wenn z. B. die Ebene der $yz$ den Körper in zwei Theile theilt; so ist $z$ für den obern Theil dieser Ebene positiv und für den untern Theil derselben negativ. Hieraus folgt, daß, wenn die Ebene der $yz$ den Körper in zwei symmetrische Theile theilt, die Elemente $\mathrm{U}_x x dx$ paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, so daß das Integral $\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{U}_x x dx$, und folglich $\xi$ sich auf Null reducirt; d. h. in diesem Falle liegt der Schwerpunkt in der Ebene der $yz$. So oft also eine Ebene den Körper in zwei symmetrische Theile theilt, liegt sein Schwerpunkt in dieser Ebene; denn man könnte alsdann diese Ebene zu einer der Koordinatenebenen nehmen, und die obigen Schlüsse wiederholen. Wenn man drei verschiedene Ebenen kennt, wovon jede den Körper in zwei symmetrische Theile theilt, so muß der Schwerpunkt desselben auf jeder derselben, und folglich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte liegen.

Oft hat man Körper zu betrachten, welche zwischen zwei sehr wenig von einander entfernten parallelen Ebenen liegen, und sehr dünne Platten oder Scheiben bilden, welche man bei der Bestimmung ihres Schwerpunktes als nur zwei Dimensionen habend betrachtet. Nimmt man z. B. die ebene Fläche eines solchen sehr dünnen Körpers zu der Ebene der $xy$, so hat man blos:

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{X} U_x x dx}{V}, \quad \eta = \frac{\int_{y_0}^{Y} U_y y dy}{V},$$

wo $V$ die Größe dieser ebenen Fläche, $U_x$, $U_y$ die Längen der linearen Durchschnitte derselben mit Ebenen, welche in den Entfernungen $x$, $y$ vom Anfangspunkte auf den Axen der $x$, $y$ senkrecht sind, bezeichnen, und $x_0$, $X$ und $y_0$, $Y$ die Entfernungen der Parallelen zu den Axen, welche die ebene Fläche des Körpers begrenzen, vom Anfangspunkte sind.

## Bewegung eines beliebigen Systemes fester Körper oder einer beliebigen Maschine.

§. 42. Im Allgemeinen versteht man unter dem Ausdrucke Maschine ein System einander berührender fester Körper, welches zur Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit gewisser Kräfte bestimmt ist. Zur Rechtfertigung oder Erläuterung dieser Definition ist es nothwendig, die Gleichung der lebendigen Kräfte, welche das Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit enthält, auf ein System einander gegenseitig berührender Körper zu erstrecken. Wenn man einen der Körper betrachtet, woraus die Maschine besteht, so hat man nach §. 35:

$$\Sigma p \frac{\omega^2}{2g} - \Sigma p \frac{\omega_0^2}{2g} = \Sigma \int P ds - \Sigma \int P' ds',$$

wo der erste Theil dieser Gleichung den Zuwachs der Summe der lebendigen Kräfte aller Molekule dieses Körpers ausdrückt, während die im zweiten Theile derselben vorkommenden Kräfte nur äußere sind, wenn jedoch bei der Bewegung des Körpers die gegenseitigen Entfernungen seiner Molekule nicht geändert werden, wie wir hier voraussetzen.

Wenn man für alle Körper, woraus die Maschine besteht, ähnliche Gleichungen, wie die vorhergehende bildet und die entsprechenden Theile aller dieser Gleichungen zusammenaddirt; so drückt der erste Theil der resultirenden Gleichung den Zuwachs der Summe der lebendigen Kräfte aller Molekule der Maschine aus, und der zweite Theil dieser Gleichung ist die Summe der

Quantitäten Arbeit aller äußern auf die Maschine wirkenden Kräfte.

Diese Summe läßt sich reduciren, wenn man annimmt, daß das System der Körper wirklich eine Maschine bildet, d. h. daß diese Körper miteinander in Berührung bleiben, indem sie während der Bewegung gegenseitig auf einander einwirken. Denn die gegenseitige Einwirkung zweier einander berührender Körper rührt von den Attraktionen, oder Repulsionen der Molekule des einen Körpers auf die des andern her, wenn sie einander so nahe sind, daß sie auf einander wirken können.

Wir wollen zwei dieser Molekule $m$ und $m'$ betrachten, welche zwei verschiedenen einander berührenden Körpern angehören; es bezeichne $r$ ihre gegenseitige Entfernung, $\mathbf{R}$ ihre gegenseitige Einwirkung auf einander, $dr$ die Veränderung ihrer gegenseitigen Entfernung in der unendlich kleinen Zeit $dt$ und $ds$ das Wegelement, welches eins dieser Molekule, z. B. $m$, während derselben Zeit im Raume beschreibt; so ist das Arbeitselement von $\mathbf{R}$ in Beziehung auf die Bewegung von $m$ im Raume $= \mathbf{R}ds.\cos(\widehat{\mathbf{R}ds})$ und das Arbeitselement in Beziehung auf die Veränderung der gegenseitigen Entfernung der beiden Molekule $= \mathbf{R}dr$. Am Ende der ganzen Zeit, während welcher die gegenseitige Einwirkung dieser Molekule statt findet, ist die Gesammtarbeit von $\mathbf{R}$ in Beziehung auf die Bewegung von $m$ im Raume $= \int \mathbf{R}ds.\cos(\widehat{\mathbf{R}ds})$ und die der Veränderung der gegenseitigen Entfernung der beiden Molekule entsprechende Totalquantität Arbeit ist $= \int \mathbf{R}dr$. Aber wenn man beachtet, was während dieser Zeit statt findet, so sieht man, daß die gegenseitige Entfernung $r$ successive immer mehr abnimmt, bis sie ein gewisses Minimum erreicht, worauf sie wieder zunimmt, und die Kraft $\mathbf{R}$ hat gewöhnlich nur in der Nähe dieses Minimums, d. h. wenn $dr$ sehr klein ist, einen merklichen Werth. Hieraus folgt, daß das Integral $\int \mathbf{R}dr$ im Allgemeinen gegen das Integral $\int \mathbf{R}ds.\cos(\widehat{\mathbf{R}ds})$ sehr klein ist, und wenn man diese Bemerkung auf alle gegenseitig auf einander einwirkende Molekule erstreckt; so sieht man, daß die von den gegenseitigen Einwirkungen der Molekule in der Nähe des Berührungspunktes herrührende Quantität Arbeit gewöhnlich gegen die Arbeit der äußern Kräfte, welche auf denselben Körper vermöge seiner Berührung mit andern Körpern, oder ähnlicher Wirkungen, wie die Gewichte der Molekule wirken, sehr klein ist. Das Integral $\int \mathbf{R}dr$ ist in aller Strenge $= 0$, wenn die Kraft $\mathbf{R}$ nur eine Funktion der Entfernung $r$ ist; denn alsdann besteht dies Integral aus Elementen, welche paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind. Obgleich man allen Grund zu der Annahme hat, daß sich die Sache so verhält, und die Kräfte $\mathbf{R}$ dieselben bleiben, wenn die Entfernungen wieder dieselben werden; so ist der Hergang der Erscheinung doch nicht so, wie wenn dieses statt fände. Aber wir werden später sehen, daß der Grund hiervon in der unrichtigen Voraussetzung liegt, daß die gegenseitigen Entfernungen der Molekule desselben Körpers in der Nähe der Berührungspunkte ungeändert bleiben.

Wir werden auf die Bestimmung der durch $\int \mathbf{R}dr$ ausgedrückten Quantitäten Arbeit später wieder zurückkommen, wenn wir die Erschütterungen der Molekule desselben Körpers in Betracht ziehen, und bei der gegenwärtigen Untersuchung, welche mehr theoretisch, als physisch ist, wollen wir annehmen, daß die Kraft $\mathbf{F}$ nur dann einen merklichen Werth hat, wenn nahezu $dr = 0$ ist, und folglich die den gegenseitigen Einwirkungen der Molekule entsprechende Quantität Arbeit verschwindet. Diese Voraussetzung nähert sich übrigens der Wirklichkeit um so mehr, je weniger die einander berührenden Körper in der Nähe des Berührungspunktes erschüttert werden, oder ihre Form verändern, d. h. je härter und je besser polirt sie sind, weil, wie die Erfahrung lehrt, in diesem Falle die Folgerungen aus unserer Hypothese sich der Wahrheit mehr nähern.

Es ist also das Arbeitselement $\mathbf{R}ds.\cos(\widehat{\mathbf{R}ds})$ für ein Molekul $m$, auf welches ein Molekul $m'$ des berührenden Körpers die Wirkung $\mathbf{R}$ ausübt, gleich dem Arbeitselemente $\mathbf{R}ds'.\cos(\widehat{\mathbf{R}ds'})$ für das Molekul $m'$, auf welches das Molekul $m$ die gleiche und entgegengesetzte Wirkung $\mathbf{R}$ ausübt, da die Summe dieser beiden Arbeitselemente gleich Null sein muß, oder die Entfernung $r$ in dem Augenblicke, wo sie ihr Minimum erreicht, sich nicht merklich ändert. Hieraus folgt, daß die äußere Arbeit, welche jeder Körper der Maschine durch seine Berührung mit einem andern erhält, der gleich ist, welche er selbst diesem andern Körper durch die Berührung mittheilt; nur haben diese beiden Quantitäten Arbeit entgegengesetzte Zeichen. Hieraus sieht man, daß man für die Widerstandsarbeit, welche in einer Maschine durch die Wirkung äußerer Körper erzeugt wird, die Bewegungsarbeit substituiren kann, welche diese Körper durch ihre Berührung mit der Maschine erhalten. Man kann also die Gleichung der lebendigen Kräfte oder der Uebertragung der Arbeit für eine aus festen Körpern bestehende Maschine, worin die Widerstandskräfte blos von der Wirkung der einander berührenden Körper herrühren und worin von den Molekularwirkungen, und folglich auch von den Reibungen in den Berührungspunkten abstrahirt wird, folgendermaßen ausdrücken:

In jeder in Bewegung befindlichen Maschine ist die Differenz zwischen der Bewegungsarbeit der äußern Kräfte während einer gewissen Zeit und der während derselben Zeit auf äußere Körper übertragenen Bewegungsarbeit dem Zuwachse der lebendigen Kräfte der Körper gleich, woraus die Maschine besteht.

Auf die Folgerungen, welche sich aus diesem Satze ergeben, werden wir später wieder zurückkommen, wenn wir gezeigt haben werden, wie sich derselbe auf Körper anwenden läßt, deren Molekule erschüttert werden können.

§. 43. Wenn man von der Molekulararbeit abstrahirt, welche durch die Berührung der verschiedenen die Maschine bildenden Körper entsteht, so ist schon die Gleichung der lebendigen Kräfte zur Bestimmung der Bewegung hinreichend, welche diese Maschine unter der Wirkung gegebener äußerer Kräfte ännimmt, wofern jedoch diese Bewegung nur von einer einzigen Art sein kann, d. h. wofern die gegenseitige Lage der verschiedenen Bestandtheile der Maschine nur von der Bestimmung einer einzigen Veränderlichen als Funktion der Zeit abhängt.

### Bewegung des Pendels.

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, daß die Rotationsbewegung eines schweren Körpers bestimmt werden solle, welcher sich um eine feste horizontale Axe drehen muß, die in einem Cylinder oder einer Welle besteht, deren Enden in zwei kreisförmigen Lagern ruhen. Es bezeichne $\vartheta$ den Winkel, welchen eine durch die Drehungsaxe gehende feste Vertikalebene mit einer durch diese Axe und durch den Schwerpunkt des Körpers gelegten und mit diesem Körper beweglichen Ebene bildet, $r$ die Entfernung eines Molekules des Körpers von der Drehungsaxe, $p$ das Gewicht dieses Molekules und $\varphi$ die Winkelgeschwindigkeit, deren anfänglicher Werth $\varphi_0$ ist; so ist die wirkliche Geschwindigkeit des betrachteten Molekules $= \varphi r$, und die Gleichung der lebendigen Kräfte verwandelt sich in folgende:

$$\Sigma \frac{p}{g} \frac{\varphi^2 r^2}{2} - \Sigma \frac{p}{g} \frac{\varphi_0^2 r^2}{2} = \int \mathrm{P} ds - \int \mathrm{P}' ds',$$

deren zweiter Theil dieselbe Bedeutung hat, wie früher. Der Faktor $\varphi^2$ ist allen Gliedern der ersten Summe $\Sigma$ und der Faktor $\varphi_0^2$ allen Gliedern der zweiten Summe gemeinschaftlich, und wenn man für $\varphi$ seinen Werth $\frac{d\vartheta}{dt}$ setzt; so erhält man:

$$\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \varphi_0^2\right] \Sigma \frac{pr^2}{2g} = \int \mathrm{P} ds - \int \mathrm{P}' ds',$$

wo sich der zweite Theil dieser Gleichung als Funktion des Winkels $\vartheta$ berechnen läßt, und wenn man folglich diesen zweiten Theil mit $f(\vartheta)$ bezeichnet; so ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\varphi_0{}^2 + \frac{f(\vartheta)}{\Sigma \frac{pr^2}{2g}}},$$

woraus folgt:

$$t = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{-d\vartheta}{\sqrt{\varphi^{02} + \frac{f(\vartheta)}{\Sigma \frac{pr^2}{2g}}}}.$$

Wir wollen annehmen, daß auf den Körper keine andern Kräfte, als die Gewichte seiner Molekule wirken, und daß die Drehungsaxe horizontal ist; so haben wir, wenn $\rho$ die Entfernung des Schwerpunktes des Körpers von der Drehungsaxe und $\Pi$ das Totalgewicht bezeichnet:

$$\int \mathrm{P} ds - \int \mathrm{P}' ds' = \Pi\rho\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),$$

wo $\vartheta_0$ den Werth des Winkels $\vartheta$ im Anfange der Bewegung oder in dem Augenblicke, wo die Geschwindigkeit Null ist, bezeichnet. Alsdann ist zu gleicher Zeit $\varphi_0 = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$, und die obige Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$t = \frac{\Sigma \frac{pr^2}{2g}}{\sqrt{\Pi\rho}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{-d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}.$$

Wenn man die seit dem Beginnen der Bewegung bis zu dem Augenblicke, wo der Schwerpunkt des Körpers in der durch die Drehungsaxe gehenden Vertikalebene liegt, verflossene Zeit haben will; so muß man $\vartheta = 0$ setzen, und alsdann erhält man:

$$t = \frac{\sqrt{\Sigma \frac{pr^2}{2g}}}{\sqrt{\Pi\rho}} \int_0^{\vartheta} \frac{+d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}.$$

Wenn der Winkel $\vartheta$ sehr klein ist, so kann man $\frac{\vartheta_0{}^2 - \vartheta^2}{2}$ für $\cos\vartheta - \cos\vartheta_0$ setzen, und alsdann hat man:

$$t = \sqrt{\frac{\Sigma pr^2}{g\Pi\rho}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

welches die Zeit ist, die der Schwerpunkt des Körpers gebraucht, um in seine tiefste Lage zu kommen, d. h. die Dauer einer Viertelschwingung, so daß folglich die Dauer einer halben Schwingung gleich:

$$\pi \sqrt{\frac{\Sigma p r^2}{g \Pi \rho}},$$

und die einer ganzen Schwingung, d. h. die Zeit, welche seit dem Anfange der Bewegung des Körpers bis zu dem Augenblicke verfließt, wo derselbe wieder in seine ursprüngliche Lage gekommen ist, gleich:

$$2\pi \sqrt{\frac{\Sigma p r^2}{g \Pi \rho}}$$

ist.

### Trägheitsmoment.

Die Summe $\Sigma pr^2$ wird das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf die Axe, welcher die Entfernungen $r$ entsprechen, genannt, und ist nichts anders, als die Summe der Produkte, welche man erhält, wenn man das Gewicht jedes Moleküles des Körpers durch das Quadrat seiner Entfernung von der Axe multiplicirt. Diese Größe kommt bei der Berechnung der Maschinen häufig vor; denn aus den vorhergehenden Rechnungen sieht man, daß man die lebendige Kraft eines Körpers erhält, welcher in einem gegebenen Augenblicke die Winkelgeschwindigkeit $\varphi$ hat, wenn man das Trägheitsmoment mit $\frac{\varphi^2}{2g}$, d. h. mit der der Geschwindigkeit $\varphi$ entsprechenden Fallhöhe multiplicirt. Das Trägheitsmoment spielt folglich in Beziehung auf die Bestimmung der lebendigen Kraft bei einer Rotationsbewegung dieselbe Rolle, wie das Gewicht des Körpers bei der progressiven Bewegung.*)

Man erhält die Größe $\Sigma pr^2$ durch die Methoden der Integralrechnung, indem man die verschiedenen Punkte des Körpers gewöhnlich auf zwei durch die Drehungsaxe gelegten rechtwinkligen Ebenen bezieht, und $x^2 + y^2$ für $r^2$ setzt, wo $x$, $y$ die Entfernungen eines beliebigen Punktes des Körpers von diesen beiden Ebenen bezeichnen, so daß man alsdann blos die Summe $\Sigma px^2 + \Sigma py^2$ zu berechnen hat. Wenn aber U und V die Flächen der Durchschnitte des Körpers mit Ebenen, welche zu den beiden Koordinatenebenen parallel, und folglich auf den Axen der $x$ und der $y$

---

*) Nur in diesem § versteht der Verfasser unter Trägheitsmoment die Größe $\Sigma pr^2$, sonst aber immer die Größe $\Sigma \frac{p}{g} r^2$.

senkrecht sind, bezeichnen; so hat man für einen Körper von einer mathematisch bestimmten Form:

$$\Sigma p x^2 = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U} x^2 dx \text{ und } \Sigma p y^2 = \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{V} y^2 dy,$$

wo $\tilde{\omega}$ das Gewicht der Volumeneinheit des Körpers und $x_0$, $x_1$, $y_0$, $y_1$ die seinen Grenzen entsprechenden Koordinaten sind.

Wenn K das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe bezeichnet, so läßt sich leicht zeigen, daß das Trägheitsmoment dieses Körpers in Beziehung auf eine zweite zu der ersten parallele und um die Länge $\rho$ von ihr entfernte Axe durch:

$$\mathrm{K} + \Pi \rho^2$$

ausgedrückt wird, wo $\Pi$ das Totalgewicht des Körpers bezeichnet. Denn wenn sich $x$, $y$ auf die durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Axe beziehen und $a$, $b$ bezeichnen die Koordinaten eines Punktes der neuen Axe; so sind $x-a$, $y-b$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Körpers in Beziehung auf diese neue Axe, und man hat folglich für das Trägheitsmoment K′ des Körpers in Beziehung auf diese letzte Axe:

$$\mathrm{K}' = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U}(x-a)^2 dx + \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{V}(y-b)^2 dy.$$

Da die erste Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geht, so hat man vermöge der Eigenschaft dieses Punktes (§. 38):

$$\tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U} x dx = 0 \text{ und } \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{V} y dy = 0,$$

und folglich verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$\mathrm{K}' = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U} x^2 dx + \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{V} y^2 dy + a^2 \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U} dx + b^2 \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{V} dy.$$

Nun ist aber:

$$\Pi = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V} dx = \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{V} dy,$$

und:

$$\mathrm{K} = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U} x^2 dx + \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{V} y^2 dy;$$

folglich wird der Werth von $K'$:

$$K' = K + \Pi (a^2 + b^2),$$

oder wenn man die Entfernung $\sqrt{a^2+b^2}$ der zweiten Axe von der ersten mit $\rho$ bezeichnet:

$$K' = K + \Pi\rho^2,$$

was bewiesen werden sollte. Hieraus folgt, daß unter allen Trägheitsmomenten desselben Körpers in Beziehung auf parallele Axen das am kleinsten ist, welches sich auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe bezieht.

Wenn man den letzten Werth des Trägheitsmomentes in den Ausdruck der Dauer T einer halben Schwingung des Pendels substituirt, so erhält man:

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{g\Pi\rho} + \frac{\rho}{g}} = \pi\sqrt{\frac{\frac{K}{\Pi\rho} + \rho}{g}},$$

und wenn der Körper nur sehr geringe Dimensionen hat, wie solches bei einer an einem sehr dünnen Faden, dessen Gewicht unberücksichtigt bleiben kann, aufgehangenen Bleikugel der Fall ist; so kann die Größe $\frac{K}{\Pi\rho}$ vernachlässigt werden, und man hat blos:

$$T = \pi\sqrt{\frac{\rho}{g}},$$

wo die Entfernung $\rho$ alsdann die Länge des einfachen Pendels genannt wird; aber wenn der Körper etwas merkliche Dimensionen hat, so setzt man $\rho + \frac{K}{\Pi\rho}$ statt $\rho$. Die Schwingungen finden also in derselben Zeit statt, als wenn sich das Pendel auf eine sehr kleine Kugel reducirte, welche an einen Faden aufgehangen ist, dessen Länge der vorhergehende Ausdruck bestimmt, indem K, wie wir gesehen haben, das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Axe und $\rho$ die Entfernung der Aufhängungsaxe von diesem Schwerpunkte bezeichnet.

Die Größe K läßt sich für ein rechtwinkliges Parallelepipedum, dessen Kanten $a$, $b$, $c$ sind, und wenn die Axe zu der Kante $c$ parallel ist, leicht berechnen. Man findet:

$$K = \frac{\tilde{\omega}abc}{12}(a^2+b^2) = \Pi\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right),$$

und wenn die Axe von der Seitenfläche, deren Kanten $a$, $c$ sind, um die Länge $l$ entfernt ist; so hat man:

$$\rho = l + \frac{b}{2}.$$

Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipedums in Beziehung auf eine Axe, welche in der Halbirungsebene des Körpers liegt, und um die Länge $l$ von einer seiner Grundflächen entfernt ist, wird folglich ausgedrückt durch:

$$\mathrm{K}' = \Pi\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right) + \Pi\left(l + \frac{b}{2}\right)^2 = \Pi\left[\frac{a^2+4b^2}{12} + bl + l^2\right].$$

Wenn $a$ gegen $b$ sehr klein ist, so hat man nahezu:

$$\mathrm{K}' = \Pi\left(\frac{b^2}{3} + bl + l^2\right),$$

und wenn $l = 0$ wird; so reducirt sich dieser Ausdruck auf:

$$\mathrm{K}' = \frac{1}{3}\,\Pi . b^2,$$

d. h. das Trägheitsmoment einer sehr dünnen Stange in Beziehung auf eine auf ihrer Länge senkrechte und durch einen ihrer Endpunkte gehende Axe ist dasselbe, als wenn der dritte Theil des Gewichtes $\Pi$ der Stange als ein schwerer Punkt an einen gewichtslosen Faden von der Länge $b$ der Stange aufgehangen würde.

Wenn man das Trägheitsmoment eines massiven Cylinders in Beziehung auf seine Axe berechnet, so findet man leicht, daß es dasselbe ist, als wenn die Hälfte des Gewichtes des Cylinders auf seiner krummen Oberfläche gleichförmig vertheilt wäre. Wenn also $\Pi$ das Gewicht des Cylinders und $\mathrm{R}$ seinen Halbmesser bezeichnet, so ist sein Trägheitsmoment in Beziehung auf seine Axe der Figur als Rotationsaxe:

$$\frac{1}{2}\,\Pi . \mathrm{R}^2.$$

Um das Trägheitsmoment einer Kugel von dem Halbmesser $\mathrm{R}$ in Beziehung auf einen ihrer Durchmesser zu erhalten, berechnet man:

$$\tilde{\omega}\int_{-\mathrm{R}}^{+\mathrm{R}} \mathrm{U}x^2dx + \tilde{\omega}\int_{-\mathrm{R}}^{+\mathrm{R}} \mathrm{V}y^2dy,$$

wo:

$$U = \pi(R^2 - x^2) \text{ und } V = \pi(R^2 - y^2)$$

ist, und $\tilde{\omega}$, $\pi$ resp. das Gewicht der Volumeneinheit und das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Da das Totalgewicht $\Pi$ der Kugel durch $\tilde{\omega}\,\frac{4}{3}\,\pi R^3$ ausgedrückt wird, so findet man:

$$K' = \frac{2}{5}\,\Pi R^2,$$

d. h. das Trägheitsmoment ist dasselbe, als wenn man $\frac{2}{5}$ des Gewichtes der Kugel in den Endpunkt eines auf der Drehungsaxe senkrechten Halbmessers brächte.

Wir werden später wieder auf die Rotationsbewegung zurückkommen, indem wir alsdann auch die Reibungen in Rechnung bringen werden.

### Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines Systemes von festen Körpern, oder einer beliebigen Maschine, wenn die Reibungen unberücksichtigt bleiben.

§. 44. Wenn die Bewegung einer Maschine auf mehrere Arten statt finden kann, d. h. wenn man mehrere Veränderliche als Funktionen der Zeit bestimmen muß, um jeden Augenblick die relative Lage aller Körper, woraus die Maschine besteht, angeben zu können; so ist die Gleichung der lebendigen Kräfte zur Bestimmung dieser Veränderlichen nicht mehr hinreichend, und man muß alsdann virtuelle Geschwindigkeiten anwenden, d. h. die Elemente der virtuellen Arbeit in Betracht ziehen, wie bei der Bewegung eines einzelnen Körpers. Wir wollen daher die Gleichung (E) in §. 36 für eine beliebige virtuelle Bewegung wieder betrachten, so können wir, wie bereits bemerkt worden, die virtuellen Bewegungen zunächst auf diejenigen beschränken, welche mit der Annahme verträglich sind, daß der Körper während der virtuellen Verrückung vollkommen fest bleibt, und folglich seine Form nicht ändert, so daß in dem zweiten Theile dieser Gleichung die den Molekularwirkungen desselben Körpers entsprechenden Glieder verschwinden (§. 34).

Ferner wollen wir die virtuellen Bewegungen noch mehr partikularisiren, indem wir sie so annehmen, daß die Körper in vollkommener Berührung mit einander bleiben, wie solches bei Maschinen nothwendig ist. Wenn man alsdann annimmt, daß jede gegenseitige Einwirkung R zwischen zwei Molekulen zweier verschiedener Körper nur dann einen merklichen Werth hat, wenn die gegenseitige Entfernung $r$ dieser Molekule ihrem **Minimum** sehr nahe, und folglich $dr=0$ ist, oder vernachlässigt werden kann; so ist auch das Produkt $\mathbf{R}dr$ und mithin das Integral $\int \mathbf{R}dr$ Null oder kann unberücksichtigt bleiben. Die von den Molekularwirkungen bei der Berührung herrührenden Quantitäten der virtuellen Arbeit verschwinden folglich aus dem zweiten Theile der in Rede stehenden Gleichung, und es bleiben nur die von den äußern Kräften herrührenden virtuellen Arbeitselemente.

Dieser zweite Theil der Gleichung läßt sich im Allgemeinen als Funktion der Zeit berechnen, und der erste Theil derselben enthält die Differenziale der Geschwindigkeiten, so wie die virtuellen Geschwindigkeiten aller Molekule. Nimmt man nun an, daß jeder der Körper, woraus die Maschine besteht, vollkommen fest ist, d. h. seine Form nicht ändert; so stehen diese virtuellen Geschwindigkeiten in solchen geometrischen Verhältnissen zu einander, daß man sie für alle Molekule der Maschine durch eine gewisse Anzahl derselben, oder allgemeiner durch die Differenziale einer gewissen Anzahl völlig unabhängiger Veränderlicher in Beziehung auf die Zeit ausdrücken kann. Nimmt man folglich successive so viele verschiedene virtuelle Bewegungen an, als erforderlich sind, um eben so viele Differenzialgleichungen zu erhalten, als man unabhängige Veränderliche hat; so kann man nach einer vorläufigen Elimination den Werth jeder dieser Veränderlichen durch Integration als Funktion der Zeit bestimmen, indem man die willkührlichen Konstanten nach der anfänglichen Bewegung des Systemes bestimmt. Man erhält also auf diese Weise alle Gleichungen, welche erforderlich und hinreichend sind, um jeden Augenblick die Bewegung der verschiedenen Theile der Maschine bestimmen zu können. Da aber bei technischen Anwendungen im Allgemeinen keine Maschinen vorkommen, bei denen mehrere Bewegungen möglich sind; so wollen wir uns auch hier bei der Anführung von Beispielen nicht aufhalten.

## Gleichgewicht und Aequivalenz der auf ein beliebiges System von Körpern, oder auf irgend eine Maschine wirkenden Kräfte.

§. 45. Die Bedingungen des Gleichgewichtes eines Systemes von Kräften, welche auf eine Maschine wirken, lassen sich aus den Differenzialgleichungen der Bewegung dieser Maschine ableiten, und man braucht zu dem Zwecke nur die Summe der von diesen Kräften abhängigen Glieder in den zweiten Theilen dieser Gleichungen gleich Null zu setzen. Denn wenn diese Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, so müssen sie die bereits existirenden Bewegungen auf keine Weise ändern können, d. h. die zweiten Theile dieser Gleichungen müssen ungeändert bleiben, wenn man diese Kräfte einführt oder hinwegläßt.

Es entstehen zwar durch die Wirkung der äußern Kräfte, deren Gleichgewicht man betrachtet, in Folge der Berührung der Körper neue innere Molekularwirkungen, so daß es genau genommen nicht gleichgültig ist, ob man diese äußern Kräfte einführt, oder hinwegläßt; allein man darf nicht vergessen, daß sich unsere theoretischen Betrachtungen, wie weiter oben, auf eine Voraussetzung stützen, vermöge welcher die von den Molekularwirkungen herrührenden Elemente der virtuellen Arbeit verschwinden.

In dieser Voraussetzung kann man also sagen, daß zum Gleichgewichte der auf eine beliebige Maschine wirkenden äußern Kräfte für alle Bewegungen, welche diese Maschine gestattet, erforderlich ist, daß die Summen der Elemente der virtuellen Arbeit Null sind. Diese Bedingungen sind offenbar nothwendig; aber sie sind auch hinreichend, weil, sobald sie erfüllt werden, die Differenzialgleichungen der Bewegungen, und folglich auch diese Bewegungen ungeändert bleiben, man mag diese äußern Kräfte einführen, oder hinweglassen, woraus nach der Definition folgt, daß sie im Gleichgewichte sind.

§. 46. Zwei successive auf dieselbe Maschine wirkende Systeme von Kräften heißen ä q u i v a l e n t, wenn sie identische Bewegungen hervorbringen, und folglich findet diese Aequivalenz statt, wenn für alle Bewegungen, welche die Maschine gestattet, die Summen der Elemente der virtuellen Arbeit für diese beiden Systeme von Kräften gleich sind. Denn wenn diese Bedingung erfüllt wird, so sind die zweiten Theile der Differenzialgleichungen der Bewegung für beide Systeme von Kräften dieselben, und folglich sind auch die in beiden Fällen hervorgebrachten Bewegungen identisch.

## Princip der Uebertragung der Arbeit bei der Bewegung eines festen Körpers, wenn auf die Erschütterungen der Molekule desselben Rücksicht genommen wird.

§. 47. In dem Vorhergehenden haben wir angenommen, daß die Molekule desselben Körpers während der ganzen Bewegung dieselben gegenseitigen Entfernungen von einander behalten, und wir haben gesehen, daß durch diese Hypothese die Berechnung der von den gegenseitigen Molekularwirkungen herrührenden Quantitäten Arbeit überflüssig gemacht wurde, und alle Geschwindigkeiten der verschiedenen Molekule durch eine kleine Anzahl unabhängiger Veränderlicher, und meistens durch eine einzige unabhängige Veränderliche, ausgedrückt werden konnten.

In der Wirklichkeit werden aber die Molekule auch der festesten Körper erschüttert, und folglich mit relativen Geschwindigkeiten in Beziehung auf einander bewegt. Diese Geschwindigkeiten zeigen sich z. B. bei allen Körpern, welche unter der Wirkung der Reibung oder des Stoßes tönen, und sie können auch unter vielen andern Umständen statt finden, wo sie weniger in die Augen fallen. Je mehr Fortschritte die Physik macht, desto nothwendiger wird die Betrachtung der Molekularbewegungen bei der Erklärung einer Menge von Erscheinungen. Man kann daher diese Betrachtung der Molekularbewegungen auch bei mechanischen Untersuchungen nicht mehr umgehen, wenn die Grundprincipien nicht ihre Strenge verlieren, und die Anwendungen derselben nicht unsicher gemacht werden sollen. Wir wollen daher in dem Folgenden diese Molekularbewegungen in Betracht zu ziehen suchen.

Die einzige Voraussetzung, welche wir machen, um die im Vorhergehenden aufgestellten Principien auf den Fall auszudehnen, wo die Molekule erschüttert werden, besteht in der Annahme, daß sich die gegenseitigen Entfernungen der Molekule nur um Größen ändern, welche gegen die Dimensionen der Körper sehr klein sind, so daß man sich immer mit dem Körper fortbewegte Koordinatenebenen denken kann, in Beziehung auf welche sich die Koordinaten der Molekule während der Bewegung nur um sehr kleine Größen ändern, obgleich die relativen Geschwindigkeiten dieser Molekule gegen diese Ebenen sehr beträchtlich sein können.

Aus dieser Hypothese folgt, daß während der Bewegung alle Integrale, welche die Summen der Produkte aus den Gewichten der Molekule und gewissen Funktionen ihrer Koordinaten in Beziehung auf die eben erwähnten beweglichen Ebenen ausdrücken, ungeachtet der Erschütterungen der Molekule als konstant betrachtet werden können; denn die Veränderungen, welche diese Erschütterungen in den Werthen dieser Integrale zur Folge haben, sind gegen diese Werthe unendlich klein, und können folglich vernachlässigt werden.

Zu den beweglichen Koordinatenebenen, auf welche wir die schwingenden Bewegungen der Molekule beziehen werden, wollen wir Ebenen nehmen, welche eine solche Bewegung haben, daß, wenn man annimmt, daß die Molekule in einem beliebigen Augenblicke aufhören zu schwingen, und mit diesen Ebenen fest verbunden bleiben, so daß sie einen festen Körper bilden, welcher sich mit diesen Ebenen zugleich fortbewegt, zwischen den fingirten Geschwindigkeiten in diesem Zustande der Festigkeit und denen, welche wirklich in dem schwingenden Zustande der Molekule statt finden, die drei folgenden Relationen statt finden:

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases}\Sigma\Pi\left(x\,\dfrac{d_m y}{dt}-y\,\dfrac{d_m x}{dt}\right)=\Sigma\Pi\left(x\,\dfrac{dy}{dt}-y\,\dfrac{dx}{dt}\right),\\[2ex]\Sigma\Pi\left(y\,\dfrac{d_m z}{dt}-z\,\dfrac{d_m y}{dt}\right)=\Sigma\Pi\left(y\,\dfrac{dz}{dt}-z\,\dfrac{dy}{dt}\right),\\[2ex]\Sigma\Pi\left(z\,\dfrac{d_m x}{dt}-x\,\dfrac{d_m z}{dt}\right)=\Sigma\Pi\left(z\,\dfrac{dx}{dt}-x\,\dfrac{dz}{dt}\right),\end{cases}$$

worin $\frac{d_m x}{dt}$, $\frac{d_m y}{dt}$, $\frac{d_m z}{dt}$ die fingirten Geschwindigkeiten für das vollkommen feste System, $\Pi$ das Gewicht eines beliebigen Molekules und $x$, $y$, $z$ die Koordinaten in Beziehung auf feste Ebenen bezeichnen. Die Bewegung, welche die beweglichen Ebenen jeden Augenblick annehmen müssen, um diesen Gleichungen zu genügen, wollen wir die mittlere Bewegung nennen.

Zunächst wollen wir bemerken, daß die vorhergehenden Gleichungen auch statt finden, wenn man den beweglichen Schwerpunkt des Systemes zum Anfangspunkte nimmt. Denn wenn $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die veränderlichen Koordinaten dieses Schwerpunktes und $x$, $y$, $z$ die auf diesen beweglichen Anfangspunkt bezogenen Koordinaten bezeichnen; so braucht man für die vorhergehenden Koordinaten nur $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ zu setzen, und zu bemerken, daß man, da der Schwerpunkt der Anfangspunkt der neuen Koordinaten $x$, $y$, $z$ ist, jeden Augenblick hat:

$$\Sigma\Pi x = 0, \quad \Sigma\Pi y = 0, \quad \Sigma\Pi z = 0,$$

und folglich, wenn man in Beziehung auf die Zeit differenzirt:

$$\text{(B)} \qquad \Sigma\Pi \frac{dx}{dt} = 0, \; \Sigma\Pi \frac{dy}{dt} = 0, \; \Sigma\Pi \frac{dz}{dt} = 0.$$

Da aber der Schwerpunkt auch der Schwerpunkt des Systemes bleibt, während es sich wie ein fester Körper bewegt; so kann man auch setzen:

$$\text{(C)} \qquad \Sigma\Pi \frac{d_m x}{dt} = 0, \; \Sigma\Pi \frac{d_m y}{dt} = 0, \; \Sigma\Pi \frac{d_m z}{dt} = 0.$$

Berücksichtigt man die Gleichungen (**B**) und (**C**), so behalten die Gleichungen (**A**), welche die mittlere Bewegung ausdrücken, nachdem man darin $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ resp. für $x$, $y$, $z$ gesetzt hat, ganz dieselbe Form, und man kann daher annehmen, daß sie sich auf Ebenen beziehen, welche unveränderliche Richtungen behalten, und den Schwerpunkt des Systemes zum beweglichen Anfangspunkte haben.

Untersuchen wir nun einige Eigenschaften der mittleren Rotationsbewegung, wie sie durch die Gleichungen (**A**) in Beziehung auf den beweglichen Schwerpunkt als Anfangspunkt bestimmt wird, indem wir unsere obige Hypothese in Beziehung auf die Schwingungen der Molekule beibehalten, d. h. wieder annehmen, daß sich die gegenseitigen Entfernungen der Molekule nur sehr wenig ändern können, so daß man annehmen kann, daß diese Molekule jeden Augenblick sehr wenig von den Lagen entfernt sind, welche sie in einem vollkommen festen Körper haben würden, worin folglich keine Schwingungen statt finden.

Es seien $x_1$, $y_1$, $z_1$ die fingirten Koordinaten der Lagen, welche die Molekule in einem vollkommen festen Körper haben würden; so ist leicht einzusehen, daß man für jeden Augenblick nahezu setzen kann:

$$
(\mathbf{D}) \left\{ \begin{aligned}
\Sigma\Pi\left(x\frac{d_m y}{dt}-y\frac{d_m x}{dt}\right) &= \Sigma\Pi\left(x_1\frac{d_m y_1}{dt}-y_1\frac{d_m x_1}{dt}\right),\\
\Sigma\Pi\left(y\frac{d_m z}{dt}-z\frac{d_m y}{dt}\right) &= \Sigma\Pi\left(y_1\frac{d_m z_1}{dt}-z_1\frac{d_m y_1}{dt}\right),\\
\Sigma\Pi\left(z\frac{d_m x}{dt}-x\frac{d_m z}{dt}\right) &= \Sigma\Pi\left(z_1\frac{d_m x_1}{dt}-x_1\frac{d_m z_1}{dt}\right);
\end{aligned}\right.
$$

denn die ersten und zweiten Theile dieser Gleichungen können durch Größen $p$, $q$, $r$, $p_1$, $q_1$, $r_1$ ausgedrückt werden, welche jeden Augenblick die Lage der augenblicklichen Rotationsaxe des festen Systemes und die Winkelgeschwindigkeit um diese Axe bestimmen, wie im §. 28 gezeigt ist. Man hat daher:

$$\frac{d_m x}{dt} = qz - ry,$$

$$\frac{d_m y}{dt} = rx - pz,$$

$$\frac{d_m z}{dt} = py - qx,$$

so daß die frühern Gleichungen (**D**) in drei Gleichungen von folgender Form übergehen:

$$r(\Sigma\Pi x^2 + \Sigma\Pi xy) - p\Sigma\Pi xz - q\Sigma\Pi yz =$$
$$r_1(\Sigma\Pi x_1^2 + \Sigma\Pi x_1 y_1) - p_1\Sigma\Pi x_1 z_1 - q\Sigma\Pi y_1 z_1.$$

Da aber die Summen $\Sigma\Pi x_1{}^2$, $\Sigma\Pi x_1 y_1$, etc. nach der Voraussetzung nahezu den Summen $\Sigma\Pi x^2$, $\Sigma\Pi xy$, etc. gleich sind; so werden die obigen Gleichungen (**D**) erfüllt, wenn man hat:

$$p = p_1, \quad q = q_1, \quad r = r_1.$$

Hieraus folgt, daß die mittlere Bewegung, welche nach der Definition durch die in den ersten Theilen der Gleichungen (**A**) vorkommenden Größen $p$, $q$, $r$ bestimmt wird, nahezu die Bewegung des festen Körpers ist, dessen Molekule sich wenig von den schwingenden Molekulen entfernen, und dessen Rotation jeden Augenblick durch die Größen $p_1 = p$, $q_1 = q$, $r_1 = r$ bestimmt wird.

Außerdem kann man beweisen, daß diese Bewegung des festen Körpers, dessen Molekule die Koordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ haben, diejenige ist; welche er unter der alleinigen Wirkung der äußern auf das schwingende System wirkenden Kräfte annehmen würde. Denn vermöge der obigen Gleichungen (**D**) verwandeln sich die Gleichungen (**A**), welche die mittlere Bewegung bestimmen, in folgende:

$$
(\mathbf{E}) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\Sigma\Pi \left(x_1 \frac{d_m y_1}{dt} - y_1 \frac{d_m x_1}{dt}\right) = \Sigma\Pi \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right), \\
&\Sigma\Pi \left(y_1 \frac{d_m z_1}{dt} - z_1 \frac{d_m y_1}{dt}\right) = \Sigma\Pi \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right), \\
&\Sigma\Pi \left(z_1 \frac{d_m x_1}{dt} - x_1 \frac{d_m z_1}{dt}\right) = \Sigma\Pi \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

Differenzirt man nun diese Gleichungen in Beziehung auf die Zeit auf die vollständigste Weise in beiden Theilen, damit die Ableitungen einander gleich werden, und bemerkt, daß, da $x_1$, $y_1$, $z_1$ demselben festen Körper entsprechen, $d_m x_1$ dasselbe ist, wie $dx_1$, weil $x_1$ nur für denselben festen Körper variiren kann; so erhält man:

$$
(\mathbf{F}) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\Sigma\Pi \left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}\right) = \Sigma\Pi \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right), \\
&\Sigma\Pi \left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right) = \Sigma\Pi \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right), \\
&\Sigma\Pi \left(z_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - x_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2}\right) = \Sigma\Pi \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Wir wollen nun das Princip von d'Alembert und das der virtuellen Geschwindigkeiten anwenden, um gewisse Gleichungen für die Bewegung in dem schwingenden Systeme zu erhalten, und für die virtuellen Verrückungen die nehmen, welche sich aus der Annahme ergeben, daß das System der Molekule einen festen Körper bildet; so haben wir für die Rotationsbewegungen dieses Systemes um die drei durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenaxen die Gleichungen:

$$
(\mathbf{G}) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\Sigma\Pi \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^3}\right) = \Sigma(x\mathbf{Y} - y\mathbf{Z}), \\
&\Sigma\Pi \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \Sigma(y\mathbf{Z} - z\mathbf{Y}), \\
&\Sigma\Pi \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \Sigma(z\mathbf{X} - x\mathbf{Z}),
\end{aligned}
\right.
$$

wo die in den zweiten Theilen vorkommenden Kräfte **X**, **Y**, **Z** allein von den äußern Wirkungen herrühren; denn die Momente von der Form $x\mathbf{Y} - y\mathbf{X}$ sind für die gegenseitigen Einwirkungen zweier Molekule desselben Systemes Null.

Aus der Vergleichung der vorhergehenden Gleichungen (**F**) und (**G**) ergibt sich:

$$
(\mathbf{H}) \quad \left\{
\begin{aligned}
\Sigma\Pi \left(x_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) &= \Sigma(x\mathbf{Y} - y\mathbf{X}), \\
\Sigma\Pi \left(y_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2y_1}{dt^2}\right) &= \Sigma(y\mathbf{Z} - z\mathbf{Y}), \\
\Sigma\Pi \left(z_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} - x_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}\right) &= \Sigma(z\mathbf{X} - x\mathbf{Z}).
\end{aligned}
\right.
$$

Da aber die Koordinaten $x, y, z$ der schwingenden Molekule sehr wenig von $x_1, y_1, z_1$ verschieden sind, so kann man in den zweiten Theilen dieser letzten Gleichungen $x_1, y_1, z_1$ für $x, y, z$ setzen, wodurch man erhält:

$$
\begin{aligned}
\Sigma\Pi \left(x_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) &= \Sigma(x_1\mathbf{Y} - y_1\mathbf{X}), \\
\Sigma\Pi \left(y_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2y_1}{dt^2}\right) &= \Sigma(y_1\mathbf{Z} - z_1\mathbf{Y}), \\
\Sigma\Pi \left(z_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} - x_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}\right) &= \Sigma(z_1\mathbf{X} - x_1\mathbf{Z}).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen beziehen sich nun auf ein einziges festes System und bestimmen die Bewegung desselben, wenn blos die äußern Kräfte **X, Y, Z,** etc. darauf wirken. Die mittlere Rotationsbewegung, welche wir in dem Folgenden anwenden werden, ist also die eines festen Körpers ohne Schwingungen der Molekule, worauf dieselben äußern Kräfte wirken, wie auf das schwingende System, und diese letzte Bewegung ist folglich die, welche in der Praxis angewandt wird, wenn man auf die Schwingungen der Molekule keine Rücksicht nimmt.

Wir wollen nun eine Eigenschaft der mittlern Rotationsbewegung erörtern, welche eigentlich nur eine unmittelbare Folgerung aus ihrer Definition ist; aber den Vortheil gewährt, daß sie sich unter einer Form darbietet, welche für den Gebrauch von Nutzen ist, den wir bald von Koordinatenebenen machen werden, welche sich mit dieser mittlern Rotationsbewegung um den Schwerpunkt des Systemes drehen.

Die Gleichungen (**A**), welche die mittlere Bewegung bestimmen, können auf folgende Form gebracht werden:

$$\text{(I)}\quad\left\{\begin{aligned}&\Sigma\Pi\left[x\left(\frac{dy}{dt}-\frac{d_my}{dt}\right)-y\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d_mx}{dt}\right)\right]=0,\\&\Sigma\Pi\left[y\left(\frac{dz}{dt}-\frac{d_mz}{dt}\right)-z\left(\frac{dy}{dt}-\frac{d_my}{dt}\right)\right]=0,\\&\Sigma\Pi\left[z\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d_mx}{dt}\right)-x\left(\frac{dz}{dt}-\frac{d_mz}{dt}\right)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Wenn man durch $\frac{d_rx}{dt}$, $\frac{d_ry}{dt}$, $\frac{d_rz}{dt}$ die relativen Geschwindigkeiten der Molekule in Beziehung auf Koordinatenebenen bezeichnet, die mit einem die mittlere Bewegung habenden Körper fortrücken; so ist klar, daß die den Schwingungen entsprechenden wirklichen Geschwindigkeiten, nämlich $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Resultanten aus den Geschwindigkeiten $\frac{d_mx}{dt}$, $\frac{d_my}{dt}$, $\frac{d_mz}{dt}$ und aus den relativen Geschwindigkeiten $\frac{d_rx}{dt}$, $\frac{d_ry}{dt}$, $\frac{d_rz}{dt}$ sind. Man hat also:

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=\frac{d_mx}{dt}+\frac{d_rx}{dt}, \text{ folglich: } &&\frac{dx}{dt}-\frac{d_mx}{dt}=\frac{d_rx}{dt},\\&\frac{dy}{dt}=\frac{d_my}{dt}+\frac{d_ry}{dt} \qquad \text{»} &&\frac{dy}{dt}-\frac{d_my}{dt}=\frac{d_ry}{dt},\\&\frac{dz}{dt}=\frac{d_mz}{dt}+\frac{d_rz}{dt} \qquad \text{»} &&\frac{dz}{dt}-\frac{d_mz}{dt}=\frac{d_rz}{dt}\end{aligned}$$

und die vorhergehenden Gleichungen (I) können also auf folgende Form gebracht werden:

$$\text{(J)}\quad\left\{\begin{aligned}&\Sigma\Pi\left(x\,\frac{d_ry}{dt}-y\frac{d_rx}{dt}\right)=0,\\&\Sigma\Pi\left(y\,\frac{d_rz}{dt}-z\frac{d_ry}{dt}\right)=0,\\&\Sigma\Pi\left(z\,\frac{d_rx}{dt}-x\,\frac{d_rz}{dt}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Es seien $x'$, $y'$, $z'$ die Koordinaten der schwingenden Molekule in Beziehung auf Koordinatenebenen, welche die mittlere Bewegung haben und immer durch den beweglichen Schwerpunkt des Systemes gehen, und $a, b, c$; $a', b', c'$; $a'', b'', c''$ seien die Kosinus der Winkel, welche die beweglichen Axen der $x'$, $y'$, $z'$ resp. mit den festen Axen der $x$, $y$, $z$ bilden; so hat man nach der Theorie der Projektionen:

$$x = ax' + by' + cz',$$
$$y = a'x' + b'y' + c'z',$$
$$z = a''x' + b''y' + c''z'.$$

Differenzirt man diese Gleichungen unter der Voraussetzung, daß die Molekule nur relative Geschwindigkeiten in Beziehung auf die als fest betrachteten beweglichen Koordinatenebenen haben, so sind $x'$, $y'$, $z'$ allein in den zweiten Theilen veränderlich, und man erhält:

$$d_r x = a dx' + b dy' + c dz',$$
$$d_r y = a' dx' + b' dy' + c' dz',$$
$$d_r z = a'' dx' + b'' dy' + c'' dz'.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (J), so bekommt man die Gleichungen:

$$(ab' - ba') \Sigma\Pi (x'dy' - y'dx') + (bc' - cb') \Sigma\Pi (y'dz' - z'dy') + (ca' - ac') \Sigma\Pi (z'dx' - x'dz') = 0,$$
$$(a'b'' - b'a'') \Sigma\Pi (x'dy' - y'dx') + (b'c'' - c'b'') \Sigma\Pi (y'dz' - z'dy') + (c'a'' - a'c'') \Sigma\Pi (z'dx' - x'dz') = 0,$$
$$(a''b - b''a) \Sigma\Pi (x'dy' - y'dx') + (b''c - c''b) \Sigma\Pi (y'dz' - z'dy') + (c''a - a''c) \Sigma\Pi (z'dx' - x'dz') = 0,$$

welche geben:

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma\Pi (x'dy' - y'dx') = 0, \\ \Sigma\Pi (y'dz' - z'dy') = 0, \\ \Sigma\Pi (z'dx' - x'dz') = 0. \end{array} \right.$$

Wenn man Polarkoordinaten in den Koordinatenebenen, z. B. in der Ebene der $x'y'$ anwendet, und daher setzt:

$$x' = r \cos \vartheta, \quad y' = r \sin \vartheta,$$

so findet man leicht:

$$x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} = r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Aber $\frac{1}{2} r^2 d\vartheta$ ist das Differenzial der Fläche, welche der vom Anfangspunkte nach dem Punkte $(x', y', z')$ gehende Radiusvektor beschreibt, und die Gleichungen (K) drücken also folgenden

Satz aus: Wenn man die schwingenden Bewegungen der Molekule auf Koordinatenebenen bezieht, welche mit dem Systeme fortrücken, und um den zum beweglichen Anfangspunkte genommenen Schwerpunkt die von uns sogenannte **mittlere Rotationsbewegung** haben; so sind die Summen der Produkte aus den Massen der Molekule und aus den Differenzialen der Flächen, welche die Projektionen der von dem Schwerpunkte nach allen Molekulen des Systemes gezogenen Radienvektoren auf den beweglichen Koordinatebenen bei der relativen Bewegung beschreiben, beständig gleich Null.

Später werden wir uns dieses Satzes, d. h. der Gleichungen (**K**), worin derselbe enthalten ist, zum Beweise anderer wichtigerer Sätze bedienen.

§. 48. Ehe wir das Princip der Mittheilung oder Uebertragung der Arbeit für ein System schwingender Molekule aufstellen, müssen wir einen Satz über die Bestimmung der lebendigen Kraft in einem solchen Systeme beweisen. Es seien $x'$, $y'$, $z'$ wieder die Koordinaten eines beliebigen Molekules in Beziehung auf Ebenen, welche durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, und sich mit der mittlern Bewegung bewegen, ferner $x$, $y$, $z$ die Koordinaten desselben Molekules in Beziehung auf drei feste Ebenen und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Koordinaten des Schwerpunktes in Beziehung auf diese festen Ebenen; so hat man, wenn $a$, $b$, $c$; $a'$, $b'$, $c$; $a''$, $b''$, $c''$ ihre frühere Bedeutung behalten:

$$x = ax' + by' + cz' + \xi,$$
$$y = a'x' + b'y' + c'z' + \eta,$$
$$z = a''x' + b''y' + c''z' + \zeta.$$

Ferner wollen wir mit $d_m$ die Differenziale für die mittlere Bewegung, d. h. wenn sich nur die Kosinus $a$, $b$, $c$; $a'$, $b'$, $c'$; $a''$, $b''$, $c''$ ändern, und mit $d_r$ die Differenziale bezeichnen, wenn sich blos die Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ ändern, d. h. wenn sich die Molekule blos mit ihren relativen Geschwindigkeiten in Beziehung auf die beweglichen Ebenen bewegen: so haben wir nach der Theorie der Projektionen:

$$dx = d_m x + d_r x + d\xi,$$
$$dy = d_m y + d_r y + d\eta,$$
$$dz = d_m z + d_r z + d\zeta.$$

Um den Ausdruck der Summe der lebendigen Kräfte zu transformiren, muß man diese Werthe in die Gleichung:

$$\Sigma \frac{p}{2g}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \Sigma p . \frac{v^2}{2g}$$

substituiren. Aber da $d_m x + d_r x$ die Veränderung der Entfernung des Molekules von dem Gewichte $p$ von einer zu der Ebene der $yz$ parallelen und durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Ebene ausdrückt, so ist die Summe $\Sigma p (d_m x + d_r x)$ vermöge der Eigenschaften des Schwerpunktes gleich Null, die Glieder:

$$2\Sigma \frac{p(d_m x + d_r x)d\xi}{dt^2}, \quad 2\Sigma \frac{p(d_m y + d_r y)d\eta}{dt^2}, \quad 2\Sigma \frac{p(d_m z + d_r z)d\zeta}{dt^2},$$

welche in dem Ausdrucke der lebendigen Kraft nach der erwähnten Substitution vorkommen müßten, sind folglich auch Null, und es bleibt blos:

$$\begin{aligned}\Sigma p . \frac{v^2}{2g} = \Sigma \frac{p}{2g}&\left[\left(\frac{d_m x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_m y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_m z}{dt}\right)^2\right] \\ &+ \Sigma \frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d_r x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_r y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_r z}{dt}\right)^2\right] + \\ &+ \Sigma \frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] \\ &+ 2\Sigma \frac{p}{2g}\left[\frac{d_m x d_r x + d_m y d_r y + d_m z d_r z}{dt^2}\right].\end{aligned}$$

Nun hat man aber:

$$\begin{aligned} d_m x &= x'da + y'db + z'dc, \\ d_m y &= x'da' + y'db' + z'dc', \\ d_m z &= x'da'' + y'db'' + z'dc'', \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} d_r x &= adx' + bdy' + cdz', \\ d_r y &= a'dx' + b'dy' + c'dz', \\ d_r z &= a''dx' + b''dy' + c''dz'. \end{aligned}$$

Die Größen $a, b, c$; $a'$ $b'$ $c'$; $a'', b'', c''$ sind aber auch durch die Relationen:

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned}$$

und:

$$ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$bc + b'c' + b''c'' = 0,$$
$$ca + c'a' + c''a'' = 0$$

mit einander verbunden, woraus folgt:

$$ada + a'da' + a''da'' = 0,$$
$$bdb + b'db' + b''db'' = 0,$$
$$cdc + c'dc' + c''dc'' = 0,$$

und:

$$adb + a'db' + a''db'' = -(bda + b'da' + b''da''),$$
$$bdc + b'dc' + b''dc'' = -(cdb + c'db' + c''db''),$$
$$cda + c'da' + c''da'' = -(adc + a'dc' + a''dc'').$$

Berücksichtigt man diese Relationen und substituirt die Werthe von $d_m x$, $d_m y$, $d_m z$, $d_r x$, $d_r y$, $d_r z$ in das letzte Glied des Ausdruckes der lebendigen Kraft, worin die drei Produkte $d_m x\, d_r x$, $d_m y\, d_r y$, $d_m z\, d_r z$ vorkommen; so reducirt sich dieses Glied auf:

$$2(adb + a'db' + a''db'')\Sigma \frac{p}{2g}(y'dx' - x'dy'),$$
$$+2(bdc + b'dc' + b''dc'')\Sigma \frac{p}{2g}(z'dy' - y'dz'),$$
$$+2(cda + c'da' + c''da'')\Sigma \frac{p}{2g}(x'dz' - z'dx').$$

Aber vermöge der Eigenschaft der mittlern Bewegung hat man nach §. 47:

$$\Sigma p.(y'dx' - x'dy') = 0, \quad \Sigma p(z'dy' - y'dz') = 0,$$
$$\Sigma p(x'dz' - z'dx') = 0.$$

Folglich ist das letzte Glied des Ausdruckes der lebendigen Kraft gleich Null, und man hat blos:

$$(\mathrm{P}) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma p.\frac{v^2}{2g} = \Sigma \frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d_m x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_m y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_m z}{dt}\right)^2\right] \\ + \Sigma \frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d_r x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_r y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_r z}{dt}\right)^2\right] \\ + \Sigma \frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung drückt folgenden merkwürdigen Lehrsatz aus: die Summe der lebendigen Kräfte eines Systems beliebig erschütterter Molekule läßt sich in drei Theile zerlegen: 1) in die lebendige Kraft, welche sämmtliche Molekule haben würden, wenn sie in den gemeinschaftlichen Schwerpunkt verlegt würden; 2) in die Summe der lebendigen Kräfte, welche diese Molekule haben würden, wenn sie bei ihrer gegenseitigen Anordnung einen festen Körper bildeten, welcher um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt die mittlere Bewegung hätte, und 3) in die Summe der lebendigen Kräfte, welche dieselben Molekule vermöge der relativen Geschwindigkeiten in Beziehung auf Koordinatenebenen haben würden, welche diese mittlere Rotationsbewegung haben.

Wir wollen der Kürze wegen in dem Folgenden die beiden ersten der angeführten Theile der Summe der lebendigen Kräfte zusammenfassen, und unter der mittlern Bewegung ohne weitern Zusatz den Inbegriff der beiden ersten Bewegungen verstehen, für welche die lebendige Kraft folglich aus den beiden ersten der angeführten Theile besteht.

§. 49. Wir wollen nun die Gleichung der lebendigen Kräfte für ein System von Molekulen betrachten, welche gegenseitige Einwirkungen auf einander ausüben, und einen Körper bilden, worin beliebig schnelle Erschütterungen oder Schwingungen statt finden können. Es bezeichne $\mathbf{R}$ die gegenseitige Einwirkung zwischen zwei benachbarten Molekulen, und $r$ deren gegenseitige Entfernung; so ist die von allen Molekularwirkungen herrührende Arbeit eine Summe von Gliedern von der Form:

$$\Sigma \int \mathbf{R} dr,$$

welche sich, wie wir gesehen haben, auf Null reducirt, wenn die Molekule nicht erschüttert werden; aber in dem gegenwärtigen Falle ist diese Summe nicht blos nicht Null, sondern sie kann sogar sehr beträchtlich werden. Gleichwohl kann man, wie wir gesehen haben, den Inbegriff aller solcher Glieder hinweglassen, das heißt, man braucht die Vibrationsgeschwindigkeiten der Molekule nicht in Rechnung zu bringen, obgleich sie sehr merklich sein können.

Es bezeichne, wie gewöhnlich, $\mathbf{P}$ eine der auf gewisse oder auf alle Molekule wirkenden äußern Bewegungskräfte und $\mathbf{P}'$ eine der äußern Widerstandskräfte; so erhält man, wenn man für jedes

Molekul die Gleichung der lebendigen Kräfte bildet, und alle diese Gleichungen zusammenaddirt:

$$(Q) \qquad \Sigma \frac{pv^2}{2g} - \Sigma \frac{pv^2_0}{2g} = \Sigma \int \mathrm{P} ds - \int \mathrm{P}' ds + \Sigma \int \mathrm{R} dr.$$

Es seien $v_m$ und $v_r$ die Geschwindigkeiten eines beliebigen Molekules bei der mittlern und bei der relativen Bewegung, wenn dasselbe auf Ebenen bezogen wird, welche die mittlere Bewegung haben, und $\mathbf{V}$ bezeichne die Geschwindigkeit des Schwerpunktes; so hat man nach dem im vorhergehenden § bewiesenen Satze:

$$(R) \qquad \Sigma \frac{pv^2}{2g} = \Sigma \frac{pv^2_m}{2g} + \Sigma \frac{pv^2_r}{2g} + \Sigma \frac{p\mathrm{V}^2}{2g}.$$

Wenn die relative Bewegung nicht statt fände, so hätte man blos:

$$\Sigma \frac{pv^2}{2g} = \Sigma \frac{pv^2_m}{2g} + \Sigma \frac{p\mathrm{V}^2}{2g},$$

und der erste Theil dieser Gleichung drückte alsdann die Summe der lebendigen Kräfte bei der mittlern vollständigen oder Totalbewegung aus, d. h. wenn man sowohl die fortschreitende, wie die drehende Bewegung in Betracht zieht. Bezeichnet man folglich mit $v'_m$ die Geschwindigkeit eines Molekules in dieser mittlern Totalbewegung, so kann man die Gleichung (**R**) auf folgende Form bringen:

$$\Sigma \frac{pv^2}{2g} = \Sigma \frac{pv'^2_m}{2g} + \Sigma \frac{pv^2_r}{2g},$$

worin man, wenn man will, den Accent hinweglassen kann, wo sich alsdann $v_m$ auf die mittlere Totalbewegung bezieht. Die Gleichung (**Q**) kann also auf folgende Form gebracht werden:

$$(S) \qquad \Sigma \frac{pv^2_m}{2g} - \Sigma \frac{pv^2_{mo}}{2g} + \Sigma \frac{pv^2_r}{2g} - \Sigma \frac{pv^2_{ro}}{2g}$$
$$= \Sigma \int \mathrm{P} ds - \Sigma \int \mathrm{P}' ds + \Sigma \int \mathrm{R} dr.$$

Wenn wir auf die Gleichung der lebendigen Kräfte bei der relativen Bewegung (§. 30) zurückgehen, mit $d_rs$ den von einem Molekule in dieser relativen Bewegung beschriebenen unendlich kleinen Bogen und mit $\mathbf{P}_m$ die nach diesem Bogen gerichtete Komponente der Kraft bezeichnen, welche diesem Molekule die Bewegung ertheilen könnte, welche dasselbe haben würde, wenn es mit den die mittlere Bewegung habenden Axen auf eine unveränderliche Weise fest verbunden wäre; so haben wir:

$$(\mathrm{T}) \quad \Sigma \frac{pv^2{}_r}{2g} - \Sigma \frac{pv^2{}_r}{2g} = \Sigma \int \mathbf{P} d_r s - \Sigma \int \mathbf{P}' d_r s - \Sigma \int \mathbf{P}_m d_r s + \Sigma \int \mathbf{R} dr.$$

Substituiren wir den Werth des ersten Theiles dieser Gleichung (**T**) in die vorhergehende Gleichung (**S**) und setzen $d_m s + d_r s$ für $ds$, so kommt:

$$(\mathrm{U}) \quad \Sigma \frac{pv^2{}_m}{2g} - \Sigma \frac{pv^2{}_{mo}}{2g} = \Sigma \int \mathbf{P} d_m s - \Sigma \int \mathbf{P}' d_m s + \Sigma \int \mathbf{P}_m drs.$$

Aus dieser Gleichung sind also die von den Molekularwirkungen herrührenden Glieder $\Sigma \int \mathbf{R} dr$ und die von den relativen Geschwindigkeiten herrührenden verschwunden, so daß man folgenden Lehrsatz hat:

Auf ein System von Molekulen, welche mit beliebig großen relativen Geschwindigkeiten erschüttert werden, kann man das Princip der lebendigen Kräfte oder das der Uebertragung der Arbeit anwenden, wenn man blos die mittlere Bewegung in Betracht zieht, ohne weder auf die relativen Geschwindigkeiten der Molekule, noch auf ihre gegenseitigen Einwirkungen Rücksicht zu nehmen, obgleich diese Kräfte in Folge der Erschütterungen sehr merkliche Quantitäten Arbeit bewirken können, und man braucht zu den von den äußern Kräften herrührenden Quantitäten Arbeit nur die hinzuzufügen, welche herrühren würden: 1) von fingirten Kräften, die jedem als frei betrachteten Molekule die mittlere Bewegung ertheilen könnten, und 2) von den relativen Verrückungen der Molekule in Beziehung auf die die mittlere Bewegung habenden Koordinatenebenen.

§. 50. Wir wollen nun zeigen, daß, wenn die Molekule nur wenig erschüttert werden, so daß sich die auf die ganze Ausdehnung des Körpers erstreckenden Integrale nicht merklich ändern, der durch $\Sigma \int \mathbf{P}_m d_r s$ ausgedrückte Theil der Arbeit, welcher die Korrektion ausdrückt, die man anbringen muß, um von dem Falle, wo die Molekule nicht erschüttert werden, zu dem überzugehen, wo sie erschüttert werden, vernachlässigt werden kann, und man folglich die Gleichung der lebendigen Kräfte, oder das Princip der Uebertragung der Arbeit für die mittlere Bewegung anwenden kann, wie es auch bei den Anwendungen geschieht, ohne daß die schwingenden Bewegungen der Molekule und die davon herrührenden Wirkungen einen merklichen Einfluß auf die Rechnung haben können.

Es seien $\mathbf{X}_m$, $\mathbf{Y}_m$, $\mathbf{Z}_m$ die rechtwinkligen Komponenten der Kraft, deren nach $d_r s$ gerichtete Komponente $\mathbf{P}_m$ ist; so hat man:

$$\mathbf{X}_m = \frac{p}{g} \cdot \frac{d^2 m x}{dt^2}, \quad \mathbf{Y}_m = \frac{p}{g} \cdot \frac{d^2 m y}{dt^2}, \quad \mathbf{Z}_m = \frac{p}{g} \cdot \frac{d^2 m z}{dt^2},$$

folglich:

$$\mathbf{X}_m dt^2 = \frac{p}{g}(x' d^2 a + y' d^2 b + z' d^2 c),$$

$$\mathbf{Y}_m dt^2 = \frac{p}{g}(x' d^2 a' + y' d^2 b' + z' d^2 c'),$$

$$\mathbf{Z}_m dt^2 = \frac{p}{g}(x' d^2 a'' + y' d^2 b'' + z' d^2 c'').$$



Die Projektionen von $d_r s$ auf dieselben festen Axen sind:

$$a dx' + b dy' + c dz',$$
$$a' dx' + b' dy' + c' dz',$$
$$a'' dx' + b'' dy' + c'' dz',$$

und da das Arbeitselement $\mathbf{P}_m d_r s$ die Summe der komponirenden Arbeitselemente ist; so kommt:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_m d_r s\, dt^2 = & \frac{p}{g}(x' d^2 a + y' d^2 b + z' d^2 c)(a dx' + b dy' + c dz') \\ & + \frac{p}{g}(x' d^2 a' + y' d^2 b' + z' d^2 c')(a' dx' + b' dy' + c' dz') \\ & + \frac{p}{g}(x' d^2 a'' + y' d^2 b'' + z' d^2 c'')(a'' dx' + b'' dy' + c'' dz').\end{aligned}$$

Verrichtet man die Multiplikationen und bildet die Summe der ähnlichen Gleichungen für alle Molekule des bewegten Körpers; so erhält man, wenn man die Faktoren, welche nicht von den relativen Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ abhängen und für alle Punkte des Körpers dieselben bleiben, aus dem Summenzeichen $\Sigma$ heraussetzt:

$$
(\mathrm{V}) \left\{
\begin{aligned}
\Sigma P_m\, d_r s\, dt^2 = {} & (ad^2a + a'd^2a' + a''d^2a'')\, \Sigma \frac{p}{g}\, x'dx' \\
& + (bd^2a + b'd^2a' + b''d^2a'')\, \Sigma \frac{p}{g}\, x'dy' \\
& + (cd^2a + c'd^2a' + c''d^2a'')\, \Sigma \frac{p}{g}\, x'dz' \\
& + (ad^2b + a'd^2b' + a''d^2b'')\, \Sigma \frac{p}{g}\, y'dx' \\
& + (bd^2b + b'd^2b' + b''d^2b'')\, \Sigma \frac{p}{g}\, y'dy' \\
& + (cd^2b + c'd^2b' + c''d^2b'')\, \Sigma \frac{p}{g}\, y'dz' \\
& + (ad^2c + a'd^2c' + a''d^2c'')\, \Sigma \frac{p}{g}\, z'dx' \\
& + bd^2c + b'd^2c' + b''d^2c'')\, \Sigma \frac{p}{g}\, z'dy' \\
& + (cd^2c + c'd^2c' + c''d^2c'')\, \Sigma \frac{p}{g}\, z'dz'.
\end{aligned}
\right.
$$

Zur Vereinfachung dieser Werthe, wollen wir uns erinnern, daß:

$$
\begin{aligned}
& ada + a'da' + a''da'' = 0, \\
& bdb + b'db' + b''db'' = 0, \\
& cdc + c'dc' + c''dc'' = 0,
\end{aligned}
$$

folglich:

$$
\begin{aligned}
& ad^2a + a'd^2a' + a''d^2a'' = -(da^2 + da'^2 + da''^2), \\
& bd^2b + b'd^2b' + b''d^2b'' = -(db^2 + db'^2 + db''^2), \\
& cd^2c + c'd^2c' + c''d^2c'' = -(dc^2 + dc'^2 + dc''^2)
\end{aligned}
$$

ist, und der Kürze wegen setzen:

$$
\begin{aligned}
& bda + b'da' + b''da'' = hdt = -(adb + a'db' + a''db''), \\
& cdb + c'db' + c''db'' = kdt = -(bdc + b'dc' + b''dc''), \\
& adc + a'dc' + a''dc'' = ldt = -(cda + c'da' + c''da'');
\end{aligned}
$$

so ergiebt sich durch Differenzirung:

$$bd^2a + b'd^2a' + b''d^2a'' = dhdt - (dbda + db'da' + db''da''),$$
$$cd^2b + c'd^2b' + c''d^2b'' = dkdt - (dcdb + dc'db' + dc''db''),$$
$$ad^2c + a'd^2c' + a''d^2c'' = dldt - (dadc + da'dc' + da''dc''),$$
$$ad^2b + a'd^2b' + a''d^2b'' = - dhdt - (dadb + da'db' + da''db''),$$
$$bd^2c + b'd^2c' + b''d^2c'' = - dkdt - (dbdc + db'dc' + db''dc''),$$
$$cd^2a + c'd^2a' + c''d^2a'' = - dldt - (dcda + dc'da' + dc''da'').$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichung (V) ein, so kommt:

$$(\mathrm{X}) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma P_m d_r s dt^2 = &- (da^2 + da'^2 + da''^2) \Sigma \frac{p}{g} x'dx' \\ &- (db^2 + db'^2 + db''^2) \Sigma \frac{p}{g} y'dy' \\ &- (dc^2 + dc'^2 + dc''^2 \Sigma \frac{p}{g} z'dz' \\ &- (dadb + da'db' + da''db'') \Sigma \frac{p}{g} (x'dy' + y'dx') \\ &- (dbdc + db'dc' + db''dc'') \Sigma \frac{p}{g} (y'dz' + z'dy') \\ &- (dadc + da'dc' + da''dc'') \Sigma \frac{p}{g} (z'dx' + x'dz') \\ &+ dhdt \Sigma \frac{p}{g} (x'dy' - y'dx') \\ &+ dkdt \Sigma \frac{p}{g} (y'dz' - z'dy') \\ &+ dldt \Sigma \frac{p}{g} (z'dx' - x'dz'), \end{aligned} \right.$$

und wenn wir die Summe $\Sigma P_m d_r s$ auf alle Molekule des Körpers erstrecken; so haben wir, da sich die Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ auf die die mittlere Bewegung habenden Ebenen beziehen:

$$\Sigma \frac{p}{g} (x'dy' - y'dx') = 0,$$
$$\Sigma \frac{p}{g} (y'dz' - z'dy') = 0,$$
$$\Sigma \frac{p}{g} (z'dx' - x'dz') = 0,$$

so daß die drei letzten Glieder aus dem vorhergehenden Ausdrucke verschwinden, und man kann daher setzen:

$$(\mathrm{Y})\quad \left\{\begin{aligned}
\Sigma \mathbf{P}_m d_r s = &-\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{da'}{dt}\right)^2+\left(\frac{da''}{dt}\right)^2\right]\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d\,(x'^2)\\
&-\left[\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{db'}{dt}\right)^2+\left(\frac{db''}{dt}\right)^2\right]\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d\,(y'^2)\\
&-\left[\left(\frac{dc}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc''}{dt}\right)^2\right]\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d\,(z'^2)\\
&-2\left(\frac{dadb+da'db'+da''db''}{dt^2}\right)\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d\,(x'y')\\
&-2\left(\frac{dbdc+db'dc'+db''dc'}{dt^2}\right)\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d\,(y'z')\\
&-2\left(\frac{dadc+da'dc'+da''dc''}{dt^2}\right)\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d\,(z'x').
\end{aligned}\right.$$

Die zu bestimmende Korrektion ist folglich:

$$\begin{aligned}
\int\Sigma \mathbf{P}_m d_r s = &-\int\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{da'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dt''}{dt}\right)^2\right]d\Sigma\,\frac{px'^2}{2g}\\
&-\int\left[\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{db'}{dt}\right)^2+\left(\frac{db''}{dt}\right)^2\right]d\Sigma\,\frac{py'^2}{2g}\\
&-\int\left[\left(\frac{dc}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc''}{dt}\right)^2\right]d\Sigma\,\frac{pz'^2}{2g}\\
&-2\int\left(\frac{dadb+da'db'+da''db''}{dt^2}\right)d\Sigma\,\frac{px'y'}{2g}\\
&-2\int\left(\frac{dbdc+db'dc'+db''dc''}{dt^2}\right)d\Sigma\,\frac{py'z'}{2g}\\
&-2\int\left(\frac{dadc+da'dc'+da''dc''}{dt^2}\right)d\Sigma\,\frac{pz'x'}{2g}.
\end{aligned}$$

Da sich die Molekule nach der Voraussetzung in Beziehung auf die Ebenen, welche die mittlere Bewegung haben, wenig aus ihren ursprünglichen Lagen entfernen, so ändern sich die differenzirten Summen $\Sigma$ während der Bewegung sehr wenig. Bezeichnen wir also eine dieser Summen mit **A** und den mit der Zeit veränderlichen Koefficienten unter dem Integralzeichen $\int$ mit **P**, so sind diese Integrale von der Form:

$$\int \mathbf{P}d\mathbf{A}.$$

Es seien $t_1, t_0$ die Grenzen in Beziehung auf die Zeit, und $\mathbf{P_0 A_0}$, $\mathbf{P_1 A_1}$ die Werthe der Größe $\mathbf{PA}$ für die Grenzen des Integrales, so hat man, wenn man theilweise integrirt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{P}d\mathbf{A} = \mathbf{P_1 A_1} \quad \mathbf{P_0 A_0} - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{A}d\mathbf{P}.$$

Da sich $\mathbf{P}$ stetig ändert, so kann man das Integral immer in eine endliche und zwar ziemlich kleine Anzahl von Theilen zerlegen, für welche $d\mathbf{P}$ das Zeichen nicht ändert. Bezeichnet also $\mathbf{A}'$ einen mittlern Werth von $\mathbf{A}$ für das Intervall von $t_0$ bis $t_1$, so hat man, da $\mathbf{P}$ das Zeichen nicht ändert:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{A}d\mathbf{P} = \mathbf{A}'(\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0});$$

aber da $\mathbf{A}$ eine Größe ist, welche sich nicht merklich ändert, weil sich die Molekule nach der Voraussetzung nur sehr wenig von ihren ursprünglichen Lagen entfernen; so kann man setzen:

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{A_0} + \alpha_1,$$
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A_0} + \alpha',$$

wo $\alpha_1$ und $\alpha'$ sehr kleine Größen sind.

Man hat demnach:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{P}d\mathbf{A} = \mathbf{P_1}(\mathbf{A_0} + \alpha_1) - \mathbf{P_0 A_0} - (\mathbf{A_0} + \alpha')(\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0})$$
$$= \alpha_1 \mathbf{P_1} - \alpha'(\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}),$$

und da $\alpha_1$, $\alpha'$ sehr kleine Größen sind, so ist auch das Integral $\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{P}d\mathbf{A}$ eine sehr kleine Größe. Folglich sind die sechs Integrale, welche den Werth von $\Sigma \int \mathbf{P} p_m d_r s$ bilden, alle für jede Dauer der Bewegung, während welcher die Differenziale der sich auf die mittlere Bewegung beziehenden Größen das Zeichen nicht ändern, sehr klein, und da man die Dauer der Bewegung immer in eine endliche Anzahl solcher Intervalle zerlegen kann; so folgt, daß die Größe $\Sigma \int \mathbf{P}_m d_r s$ vernachlässigt werden kann, wenn die Verrückungen der Molekule gegen die Ebenen, welche die mittlere Bewegung haben, sehr klein sind. Es findet also in dieser Voraussetzung folgender Satz statt:

Wenn die Molekule eines festen Körpers relative Geschwindigkeiten gegen einander bekommen, und sie entfernen sich bei diesen relativen Bewegungen von ihren ursprünglichen Lagen nur um Größen, welche gegen die Dimensionen des Körpers sehr klein sind; so findet das Princip der Uebertragung der Arbeit oder die Gleichung der lebendigen Kräfte noch statt, wenn man nur die den mittlern Bewegungen entsprechenden Geschwindigkeiten und beschriebenen Wege in Betracht zieht.

### Princip der Uebertragung der Arbeit für eine beliebige Maschine mit Berücksichtigung der Reibung.

§. 51. Betrachten wir nun eine beliebige Maschine, welche aus einer Verbindung von festen Körpern besteht, die einander während der Bewegung berühren. Der vorhergehende Lehrsatz ist auf jeden einzelnen Maschinentheil anwendbar; aber zu den äußern Kräften, welche in den Arbeitsquantitäten $\Sigma\int \mathbf{P} d_m s$ vorkommen müssen, sind noch die gegenseitigen Einwirkungen zu zählen, welche bei der Berührung der Körper zwischen den benachbarten Molekulen entstehen. Denn es verhält sich mit diesen Wirkungen nicht so, wie mit den zwischen den Molekulen desselben Körpers statt findenden; sie verschwinden nicht aus der definitiven Gleichung der lebendigen Kräfte, sondern es entspricht jeder Berührung und jedem Körper ein Glied von der Form:

$$\Sigma\int \mathbf{P} d_m s,$$

welches auch durch $\Sigma\int \mathbf{R} d_m r$ ausgedrückt werden kann, wo das Differenzial $d_m r$ nur so genommen ist, daß sich die Molekule des Körpers bewegen. Bei der Addition der Gleichungen der lebendigen Kräfte für die beiden einander berührenden Körper braucht man nur die beiden Differenziale $d_m r$ für die beiden Molekule, welche die Wirkung $\mathbf{R}$ auf einander ausüben, zusammen zu addiren, und die Summe wird wieder ausgedrückt durch:

$$\Sigma\int \mathbf{R} d_m r,$$

wo $d_m r$ hier das Totaldifferenzial der Entfernung $r$ zwischen den Molekulen während der gleichzeitigen Bewegung der beiden einander berührenden Körper bezeichnet.

Um den Werth zu bestimmen, welchen dieses Glied annehmen muß, wollen wir bemerken, daß, da jede Wirkung $\mathbf{R}$ eine Funktion der gegenseitigen Entfernung $r$ der beiden Molekule ist, und folglich denselben Werth wieder annimmt, wenn $r$ während des Vorüberganges des einen Molekules vor dem andern wieder denselben Werth bekommt, das nicht wie das Vorhergehende für die mittlere Bewegung genommene Integral, sondern das für die wirkliche Bewegung, wobei auch die Schwingungen der Molekule in Betracht gezogen werden, genommene Integral $\int \mathbf{R} dr$ aus zwei

Theilen besteht, welche einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, so daß man setzen kann:

$$\int \mathrm{R}dr = 0.$$

Da aber die Entfernung $r$ eine Funktion der Koordinaten der betrachteten Molekule beider Körper in Beziehung auf die die mittlere Bewegung habenden Ebenen und der Kosinusse der Winkel ist, welche diese beweglichen Ebenen mit den festen Axen bilden; so ist das Totaldifferenzial $dr$ die Summe der Partialdifferenziale $d_m r$, $d_r r$, wovon das eine für die mittlere Bewegung, d. h. wenn sich nur die erwähnten Kosinusse ändern, und das andere für die relative Bewegung, d. h. wenn man nur die Koordinaten der Molekule in Beziehung auf die beweglichen Ebenen variiren läßt, genommen ist. Man hat mithin:

$$dr = d_m r + d_r r,$$

und folglich:

$$\Sigma \int \mathrm{R}d_m r + \Sigma \mathrm{R}d_r r = 0.$$

Es ist also:

$$\Sigma \int \mathrm{R}d_m r = -\Sigma \mathrm{R}d_r r.$$

Das Differenzial $d_r r$ läßt sich in zwei Theile zerlegen, wovon sich jeder nur auf die relative Bewegung der Molekule eines einzigen Körpers bezieht. Bezeichnen wir diese Partialdifferenziale mit $d'_r r$ und $d''_r r$, so haben wir:

$$\Sigma \int \mathrm{R}d_r r = \Sigma \int \mathrm{R}d'_r r + \int \mathrm{R}d''_r r,$$

und folglich:

$$\Sigma \int \mathrm{R}d_m r = -\Sigma \int \mathrm{R}d'_r r - \Sigma \int \mathrm{R}d''_r r.$$

Wir wollen nun jedes der Glieder:

$$\Sigma \int \mathrm{R}d'_r r \text{ und } \Sigma \int \mathrm{R}d''_r r$$

näher untersuchen, wobei wir aber, da beide von einerlei Natur sind, nur eins derselben:

$$\Sigma \int \mathrm{R}d'_r r$$

zu betrachten brauchen.

Das Differenzial $d'_r r$ ist in diesem Ausdrucke so genommen, daß sich nur eins der beiden Molekule bewegt, und zwar für die relative Bewegung, wobei wir bemerken wollen, daß sich das betrachtete Molekul vor der Einwirkung der Kraft $\mathbf{R}$ unter dem Einflusse der von allen benachbarten Molekulen ausgeübten Wirkungen im Gleichgewichte befand. Durch die Einwirkung der neuen Kraft $\mathbf{R}$ wird dieses Molekul aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, aber die von den benachbarten Molekulen desselben Körpers in Folge dieser Verrückung auf dasselbe ausgeübten Wirkungen streben es in seine ursprüngliche Lage zwar nicht direkt, aber vermöge einer Reihe von Schwingungen um diese Lage des Gleichgewichtes zurückzuführen.

Für die relative und schwingende Bewegung der durch die bei der Berührung stattfindenden Wirkungen auf diese Weise verrückten Molekule kann man das in §. 30 für die relativen Bewegungen aufgestellte Princip der lebendigen Kräfte anwenden. Die wegen der mittlern Bewegung jedes Körpers einzuführenden fingirten Kräfte geben nur eine Quantität Arbeit, welche gegen die von den bei der geringsten Verrückung der Molekule eine beträchtliche Intensität erlangenden gegenseitigen Einwirkungen herrührende Quantität Arbeit ganz unmerklich ist, und es verhält sich also gerade so, wie in dem Falle eines ruhenden Körpers, auf dessen Molekule an einem Theile der Oberfläche, oder in einer geringen Entfernung von derselben Kräfte $\mathbf{R}$ wirken, welche sie aus ihrer Lage des Gleichgewichtes entfernen Durch diese Verrückungen werden die gegenseitigen Einwirkungen zwischen den Molekulen desselben Körpers geändert, und wir wollen mit $\mathbf{R}'$ die Resultante aus den neuen auf ein Molekul wirkenden Kräften bezeichnen, welche für die Gleichgewichtslage des Molekules Null ist. Ferner bezeichnen $\Sigma \int \mathbf{R}' dr'$ die von diesen neuen Kräften oder Wirkungen herrührenden Quantitäten Arbeit, $v'$ die relative Geschwindigkeit irgend eines der betrachteten Molekule und $p$ das Gewicht desselben; so hat man nach dem Principe der lebendigen Kräfte der relativen Bewegungen, und weil bei dem Beginne der Wirkung der äußern Kraft $\mathbf{R}$ jedes Molekul keine relative Geschwindigkeit hat:

$$\Sigma \frac{pv'^2}{2g} = \Sigma \int \mathbf{R} d'_r r + \Sigma \int \mathbf{R}' dr',$$

oder:

$$\Sigma \int \mathbf{R} d'_r r = \frac{\Sigma p v'^2}{2g} - \Sigma \int \mathbf{R}' dr'.$$

Die den Wirkungen $\mathbf{R}'$ entsprechende Arbeit kann nur eine Widerstandsarbeit sein, wenn, wie wir voraussetzen, die Molekule sich vor ihrer Verrückung in der Lage des stabilen Gleichgewichtes befanden, welche sie wieder anzunehmen streben; denn die hervorgerufenen Kräfte haben nach den Koordinatenaxen Komponenten, welche nach diesen Axen zuerst in einem der Verrückung entgegengesetzten Sinne wirken, weil sonst kein stabiles Gleichgewicht statt gefunden hätte. Diese Komponenten können folglich nur Quantitäten Widerstandsarbeit hervorbringen, selbst wenn man nach der Periode der Entfernung aus der Gleichgewichtslage eine Periode der Rückkehr betrachtet; denn während dieser letzten Periode würde doch die Bewegungsarbeit nicht größer sein können, als die während der ersten Periode hervorgebrachte Widerstandsarbeit.

Die Glieder $\Sigma \int R' dr'$ sind also negativ; folglich besteht die Größe $\Sigma \int R d'_r r$ aus zwei positiven Theilen, ist also immer positiv, und dasselbe gilt für die sich auf den zweiten Körper beziehende Größe $\Sigma \int R d''_r r$.

Die von den Reibungen $\Sigma \int R d_m r$ herrührende Arbeit, welche $= - \Sigma \int R d'_r r - \Sigma \int R d''_r r$ ist, wird also durch eine negative Größe ausgedrückt, und erscheint immer als ein Verlust. Insofern also die Wirkung der Reibung darin besteht, die Molekule an der Berührungsstelle, und folglich successive auch alle übrigen Molekule in schwingende Bewegungen zu versetzen, muß man eine Widerstandsarbeit einführen, wenn man nur die mittlern Bewegungen der beiden einander berührenden Körper in Betracht zieht, d. h. es geht immer ein Theil der Bewegungsarbeit durch diese Schwingungen verloren, ohne daß die mittlern Bewegungen, welche man allein in der Praxis in Rechnung bringen muß, vortheilhaft verändert würden.

Aus dem vorhin Gesagten folgt: daß das Princip der Uebertragung der Arbeit für eine eine beliebige Maschine bildende Verbindung fester Körper statt findet, was für Schwingungen in diesen Körpern auch durch die Reibungen in den Berührungspunkten entstehen mögen, wofern man nur die mittlern Bewegungen in Rechnung bringt, und die den Reibungen entsprechenden Quantitäten Widerstandsarbeit in Betracht zieht.

### Bestimmung der durch die Reibung konsumirten Quantität Arbeit.

§. 52. Die Berechnung dieser Quantitäten Arbeit läßt sich durch die folgenden Betrachtungen sehr vereinfachen. Die durch die Reibungen verloren gegangene Arbeit besteht aus Gliedern von der Form $\Sigma \int R d_m r$, wo $d_m r$ die Aenderung der gegenseitigen Entfernung zweier Molekule bezeichnet, welche zwei verschiedenen Körpern angehören und sehr nahe an der Berührungsoberfläche liegen, indem diese Aenderung nur für die mittlern Bewegungen genommen ist. Diese Größe, so wie alle von den gegenseitigen Einwirkungen herrührenden Quantitäten Arbeit, ändern sich nicht, wenn man dem Systeme der beiden einander berührenden Körper eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt, welche der mittlern Bewegung des einen der beiden Körper gleich und entgegengesetzt ist, so daß diese Bewegung aufgehoben und der Körper in den Zustand der Ruhe versetzt wird. Die Berechnung der Glieder $\Sigma\int \mathbf{R}d_m r$ wird alsdann sehr erleichtert, weil man die Aenderung $d_m r$ nur für die Bewegung eines Körpers zu betrachten hat. Zur Vereinfachung dieser Rechnung wollen wir bemerken, daß man $\int \mathbf{P}d_m s$ für $\int \mathbf{R}d_m r$ setzen kann, wo $d_m s$ der Weg ist, welchen ein Molekul des beweglichen Körpers, auf welches von einem andern Molekule des benachbarten unbeweglich gewordenen Körpers eine Wirkung **R** ausgeübt wird, mit der mittlern Bewegung beschreibt, und wo **P** die Komponente der Kraft **R** in dem Sinne des Weges $d_m s$ ist. Sehr nahe an der Berührungsoberfläche sind aber die Geschwindigkeiten der mittlern Bewegung der beweglichen Körper an der Berührungsoberfläche tangent; denn selbst dann, wenn außer der gleitenden Bewegung noch eine zweite rollende Bewegung statt fände, könnte diese letztere als eine dem Körper ertheilte Rotationsbewegung um eine Tangente an der Berührungsfläche betrachtet werden, und gäbe auf dieser Tangente nur Geschwindigkeiten, welche gleich Null und in allen benachbarten Punkten des Berührungspunktes unmerklich sind, so daß also $d_m s$ ein in tangentialer Richtung an den Berührungsflächen beschriebener Weg ist. Wenn man die Glieder $\int \mathbf{P}d_m s$ für alle Molekule, welche nahe an den Berührungsflächen sämmtlich gleiche Geschwindigkeiten haben, zusammennimmt; so ist $d_m s$ ein gemeinschaftlicher Faktor, und die Summe $\Sigma\int \mathbf{P}d_m s$ wird $= \int d_m s \Sigma \mathbf{P}$, wodurch die Quantität Arbeit ausgedrückt wird, welche einer Totalkraft $\Sigma\mathbf{P}$ entspricht, die an einem fingirten Punkte angebracht ist, welcher in der Zeit $dt$ einen Weg $d_m s$ beschreibt. Die Kraft $\Sigma\mathbf{P}$ ist die Totalreibung für das System von Punkten, welche als dieselbe Geschwindigkeit habend, betrachtet werden, und $d_m s$ drückt die Größe aus, um welche der eine Körper auf dem andern in der unendlich kleinen Zeit $dt$ fortgleitet. Die durch die Reibung zwischen zwei Maschinenbestandtheilen konsumirte Quantität Arbeit wird also im Allgemeinen durch ein Integral ausgedrückt, welches sich auf die Dauer der betrachteten Bewegung erstreckt, und dessen Element das Produkt aus der Totalreibung für alle Berührungspunkte, welche gleiche und parallele Geschwindigkeiten haben und aus dem Längenelemente ist, um welches der eine Körper auf dem andern hingleitet.

Der absolute Werth des von der Reibung herrührenden Verlustes an Arbeit kann nur durch Experimente bestimmt werden, und um dieselben anzustellen, braucht man nur zwei Körper mit einander in Berührung zu bringen, und dem einen dieser beiden Körper auf dem andern ruhenden eine gleichförmige Bewegung zu ertheilen. Da in diesem Falle jeden Augenblick zwischen der dem beweglichen Körper mitgetheilten Quantität Arbeit, und der von den Molekularwirkungen, welche bei der Berührung statt finden, allein herrührenden Widerstandsarbeit Gleichheit statt findet; so ist, wenn man die Bewegungsarbeit kennt, auch die von der Reibung herrührende Widerstandsarbeit bekannt. Auf diese Weise hat man gefunden, daß man diese Widerstandsarbeit als von einer Widerstandskraft F, der Reibung, welche in dem Berührungspunkte an dem beweglichen Körper und nach dem entgegengesetzten Sinne seiner gleitenden Bewegung auf dem unbeweglichen Körper wirkt, herrührend betrachten kann. Man hat gefunden, daß die Intensität dieser Kraft nahezu dem bei der Berührung beider Körper stattfindenden Normaldrucke proportional und zugleich von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig ist, wenigstens bis zu Geschwindigkeiten von ungefähr drei Meter in der Sekunde.

Wir werden der Berechnung der Reibungen, welche eine so wichtige Rolle in den Maschinen spielen, später ein besonderes Kapitel widmen.

## Vom Stoße.

§. 53. Wenn zwischen zwei Körpersystemen, oder zwei beliebigen Maschinen ein Stoß statt findet, so kann man nicht mehr annehmen, daß die Molekule desselben Körpers ihre ursprünglichen gegenseitigen Entfernungen beibehalten, sondern es entstehen durch den Stoß Erschütterungen der Molekule, worauf die Theorie Rücksicht nehmen muß. Bei festen Körpern kann man jedoch annehmen, daß die Formveränderungen und überhaupt die gegenseitigen Verrückungen der Molekule jedes Körpers während der sehr kurzen Zeit, welche zu den Geschwindigkeitsveränderungen erfordert wird, sehr gering gewesen sind, d. h. man kann annehmen, daß die Mittheilung der Bewegung in einer sehr kurzen Zeit erfolgt.

Betrachtet man die Bewegung jedes Molekules während der sehr kurzen Dauer des Stoßes, während welcher eine plötzliche Veränderung seiner Geschwindigkeit statt findet, so muß man annehmen, daß auf dieses Molekul alle benachbarten Molekule und auch äußeren Kräfte, z. B. die Schwere, wirken. Wenn man für die virtuelle Geschwindigkeit jedes Molekules diejenige nimmt, welche statt finden würde, wenn keine Erschütterungen der Molekule statt fänden, oder wenn die Molekule jedes Körpers ihre ursprünglichen gegenseitigen Entfernungen beibehielten; so ist, wie auch bereits bemerkt worden, einleuchtend, daß die virtuellen Momente der gegenseitigen Einwirkungen der Molekule desselben Körpers einander aufheben, so daß nur die der äußern Kräfte, welche wir mit $P\delta p$ bezeichnen wollen, und die der zwischen den in der Nähe des Berührungspunktes zweier verschiedener Körper liegenden Molekulen statt findenden Einwirkungen übrig bleiben. Bezeichnet man diese letzten virtuellen Momente mit $\mathbf{R}\delta r$, so hat man folglich:

$$\Sigma\ \frac{p}{g}\left(\frac{du}{dt}\delta x+\frac{dv}{dt}\delta y+\frac{dw}{dt}\delta z\right)=\Sigma\mathbf{P}\delta p+\Sigma\mathbf{R}\delta r.$$

Aber nach der Natur der gewählten virtuellen Geschwindigkeiten $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ hängen dieselben für jedes Molekul nur von der Lage der augenblicklichen Rotationsaxe des als vollkommen fest betrachteten Systemes, wozu das Molekul gehört, und von der Lage dieses Molekules gegen diese Axe ab. Man kann aber diese Axe während der kurzen Dauer des Stoßes als unveränderlich betrachten, und da die Molekule nach der Voraussetzung während dieser Dauer wenig verrückt werden; so ändern sich auch die virtuellen Geschwindigkeiten sehr wenig, obgleich die wirklichen Geschwindigkeiten beträchtlich geändert werden. Man kann folglich die vorhergehende Gleichung für die Dauer des Stoßes in Beziehung auf die Zeit integriren, ohne $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ variiren zu lassen. Bezeichnet man also mit $u_0$, $v_0$, $w_0$ und $u_1$, $v_1$, $w_1$ resp. die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße, so hat man:

$$\Sigma\ \frac{p}{g}\left[(u_1-u_0)\,\delta x+(v_1-v_0)\,\delta y+(w_1-w_0)\delta z\right]=\Sigma\int\mathbf{P}\delta p\,dt+\Sigma\int\mathbf{R}\delta r\,dt.$$

### Quantität oder Größe der Bewegung.

Das Produkt $\frac{p}{g}u$ aus der Masse und Geschwindigkeit eines materiellen Punktes oder eines Körpers wird die Quantität oder Größe der Bewegung desselben genannt, und ist das in Beziehung auf die Zeit genommene Integral einer auf den materiellen Punkt oder Körper wirkenden Kraft, so daß unter der Quantität oder Größe der Bewegung im Allgemeinen ein Integral wie $\int\mathbf{P}dt$ zu verstehen ist, wo $\mathbf{P}$ eine Kraft und $dt$ ein unendlich kleines Element der Zeit bezeichnet.

Da die äußern Kräfte $\mathbf{P}$, welche gewöhnlich in dem Gewichte der Molekule bestehen, allein die Geschwindigkeiten nicht plötzlich ändern können und gegen die Molekularwirkungen, welche diese plötzlichen Geschwindigkeitsveränderungen bewirken, sehr klein sind; so können sie in einer sehr kurzen Zeit nur Glieder hervorbringen, welche gegen den ersten Theil der letzten Gleichung unmerklich sind, so daß man sie vernachlässigen, und folglich setzen kann:

$$\Sigma\ \frac{p}{g}\left[(u_1-u_0)\delta x+(v_1-v_0)\delta y+(w_1-w_0)\delta z\right]=\Sigma\int\delta\mathbf{R}r\,dt.$$

Wenn man die virtuellen Geschwindigkeiten schicklich wählt und sie für jeden Körper wieder so annimmt, als wenn derselbe vollkommen fest wäre; so kann man den zweiten Theil der letzten Gleichung so umgestalten, daß nur Tangentialkräfte darin vorkommen. Denn obgleich die Körper während des Stoßes zusammengedrückt werden können, und folglich die Normalgeschwindigkeiten an den Berührungsflächen nicht gleich sind, so kann man bei der Wahl der virtuellen Geschwindigkeiten die Körper doch als vollkommen fest betrachten und von der wirklichen Zusammendrückung desselben abstrahiren, wenn man annimmt, daß die Körper in den Berührungspunkten aneinander hingleiten. Alsdann ist für zwei benachbarte Molekule, zwischen welchen die gegenseitige Einwirkung $\mathbf{R}$ statt findet, die nach der Normale gerichtete Komponente des virtuellen Momentes $\delta r$ gleich Null, die virtuelle Arbeit der Kraft $\mathbf{R}$ reducirt sich folglich auf die der Komponente $\mathbf{F}$ nach der Berührungsebene und der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung kann auf die Form:

$$\Sigma \int \mathbf{F}\delta f . \cos(\mathbf{F}\delta f) . dt$$

gebracht werden, wo das virtuelle Moment $\delta f$ hier in der virtuellen und nicht in der wirklichen Bewegung genommen ist. Hiernach hat man:

$$\Sigma \frac{p}{g} [(u_1 - u_0)\delta x + (v_1 - v_0)\delta y + (w_1 - w_0)\delta z] = \Sigma \int \mathbf{F}\delta f . \cos(\mathbf{F}\delta f) . dt;$$

aber wenn die virtuelle Bewegung so gewählt ist, daß die einander berührenden Körper mit, oder ohne Rollen, aber ohne Drehung, aneinander hingleiten, so sind die virtuellen Momente $\delta f$ für alle einander berührenden Molekule und für die ganze Dauer der Berührung nahezu einander gleich. Das virtuelle Element $\delta f$ ist also von der Lage des betrachteten Molekules unabhängig, und da dasselbe, wie alle virtuellen Geschwindigkeiten, auch von der Zeit unabhängig ist, weil wir voraussetzen, daß der Stoß sehr schnell erfolgt; so tritt dasselbe aus dem Integralzeichen $\int$ und aus einem Theile der Summe $\Sigma$ heraus, und man hat folglich:

$$\Sigma \frac{p}{g} [(u_1 - u_0)\delta x + (v_1 - v_0)\delta y + (w_1 - w_0)\delta z] = \Sigma \delta f . \Sigma \int \mathbf{F} \cos(\mathbf{F}\delta f) . dt,$$

wo sich das erste Summenzeichen $\Sigma$ im zweiten Theile dieser Gleichung auf die verschiedenen Berührungspunkte des Körpers und das zweite auf alle um denselben Berührungspunkt herumliegenden benachbarten Molekule bezieht. Man kann alsdann der Kürze wegen für jeden Berührungspunkt für die Summe $\Sigma \int \mathbf{F} \cos(\mathbf{F}\delta f) dt$ einen einzigen Buchstaben $\mathbf{F}$ setzen, welcher die einer Tangentialkraft, die nach der Erfahrung die Resultante aus allen von der Berührung herrührenden und nach diesem Sinne gerichteten Wirkungen ist, entsprechende **Quantität Bewe-**

gung ausdrückt und die Summe der Quantitäten Bewegung ist, welche den während des Stoßes stattfindenden Reibungen entspricht. Wenn man das Summenzeichen $\Sigma$ im zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung nur noch auf die verschiedenen Berührungen oder Berührungselemente anwendet, für welche $\delta f$ nicht mehr dasselbe ist; so kann man diese Gleichung auf folgende Form bringen:

$$\Sigma\ \frac{p}{g}[(u_1-u_0)\delta x+(v_1-v_0)\delta y+(w_1-w_0)\delta z]=\Sigma \mathbf{F}\delta f,$$

oder:

$$\Sigma\ \frac{p}{g}\ (u_1\delta u+v_1\delta y+w_1\delta z)=\Sigma\ \frac{p}{g}\ (u_0\delta x+v_0\delta y+w_0\delta z)+\Sigma \mathbf{F}\delta f,$$

woraus folgt: daß zwischen den, den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße entsprechenden Quantitäten der Bewegung dieselben Relationen statt finden, als zwischen den äquivalenten Kräften, welche auf dieselben, als vollkommen fest betrachteten Systeme von Molekulen, die einander in gewissen Punkten berühren, wirken, wenn man jedoch bei dieser Aequivalenz die den Reibungen an den Berührungspunkten entsprechenden Quantitäten Bewegung in Rechnung bringt.

### D'Alembert's Princip bei dem Stoße fester Körper.

Nach den Versuchen von Morin scheinen diese von den während des Stoßes stattfindenden Reibungen herrührenden Quantitäten der Bewegung wie die von gewöhnlichen Druckkräften herrührenden Reibungen berechnet werden zu müssen; d. h. man kann annehmen, daß sie zu den Quantitäten der Bewegung, welche den normal auf die Berührungsflächen ausgeübten Wirkungen entsprechen, in einem konstanten Verhältnisse stehen. Da das Verfahren zur Berechnung dieser letztern dasselbe ist, als für die zwischen den verschiedenen Bestandtheilen einer in Bewegung befindlichen Maschine statt findenden einfachen Druckkräfte, so werden wir später auf diese letzte Bestimmung zurückkommen.

Der vorhergehende Satz wird das d'Alembert'sche Princip für den Stoß der Körper genannt, wodurch die nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten bei einer beliebigen Bewegung zwischen den Kräften statt findenden Relationen auf die Quantitäten der Bewegung ausgedehnt werden. Aber man darf dabei nicht vergessen, daß dieses nur unter der Bedingung geschehen kann, daß die Molekule der Körper während des Stoßes, d. h. während des Zeitraumes zwischen den beiden Augenblicken, für welche man die beiden Systeme der Quantitäten der Bewegung bestimmt, ihre Lage im Raume nur sehr wenig geändert haben, d. h. daß die Veränderungen ihrer Koordinaten nur sehr kleine Größen sind. Das eben Gesagte wäre folglich nicht auf zwei Luftmassen anwendbar, welche sich während der Dauer des Stoßes sehr zusammendrücken.

§. 54. Wenn nach dem Stoße, in dem Augenblicke, für welchen die Geschwindigkeiten $u_1$, $v_1$, $w_1$ genommen werden, noch Erschütterungen der Molekule statt finden; so würde der vorhergehende Satz nichts lehren, weil sich von den eigenen Geschwindigkeiten der Molekule kein Schluß auf die Geschwindigkeiten des ganzen Systemes derselben und auf die Bewegungen der Körper machen ließe. Alsdann muß man zu den mittlern Bewegungen, durch deren Betrachtung wir bei dem Principe der lebendigen Kräfte ähnliche Schwierigkeiten beseitigt haben, seine Zuflucht nehmen, und auf folgende Weise verfahren.

Die zur Bestimmung der in der vorhergehenden Gleichung vorkommenden Größen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ gewählten virtuellen Bewegungen können für jeden Körper nur eine fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes und nur eine Rotationsbewegung um diesen Punkt geben, und die Summen der daraus hervorgehenden virtuellen Momente erzeugen sowohl die Summen der Quantitäten der fortschreitenden Bewegung, als die Summen der Momente der Quantitäten der Bewegung um die Axen der virtuellen Rotation in Beziehung auf die Schwerpunkte der verschiedenen Körper. Da aber diese Größen für die wirklichen und für die mittlern Bewegungen dieselben sind, so kann man die letztern in die vorhergehende Gleichung substituiren, und alsdann hat man, wenn $u_m$, $v_m$, $w_m$ die Geschwindigkeitskomponenten bei der mittlern Bewegung sind:

$$\Sigma\,\frac{p}{g}\,(u_m\delta x+v_m\delta y+w_m\delta z)=\Sigma\,\frac{p}{g}\,(u_0\delta x+v_0\delta y+w_0\delta z)+\Sigma F\delta f.$$

Aus dieser letzten Gleichung lassen sich immer so viele verschiedene Gleichungen ableiten, als zur Bestimmung der mittlern Bewegungen jedes Maschinenbestandtheiles erforderlich sind, und zwar wegen der verschiedenen Systeme, welche man für die virtuellen Geschwindigkeiten $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, etc. annehmen kann.

Wenn die Körper am Ende des Stoßes, d. h. in dem Augenblicke, für welchen die mittlern Geschwindigkeiten $u_m$, $v_m$, $w_m$ genommen werden, noch in Berührung sind; so können diese mittlern Geschwindigkeiten, da sie mit den Verbindungen des Systemes während des Stoßes verträglich sind, für die virtuellen Geschwindigkeiten genommen werden, und die vorhergehende Gleichung verwandelt sich durch Division mit $dt$ und Transposition in folgende:

$$\Sigma \frac{p}{g}(u^0 u_m + v^0 v_m + w^0 w_m) - \Sigma \frac{p}{g}(u^2{}_m + v^2{}_m + w^2{}_m) + \Sigma F \frac{\delta_m f}{dt} = 0.$$

Es ist aber:

$$u_0 u_m = \frac{1}{2}[u^2{}_0 + u^2{}_m - (u_0 - u_m)^2]$$

und ähnliche Ausdrücke hat man für $v_0 v_m$, $w_0 w_m$, und wenn man dieselben substituirt; so erhält man:

$$\Sigma \frac{p}{2g}(u^2{}_0 + v^2{}_0 + w^2{}_0) - \Sigma \frac{p}{2g}(u^2{}_m + v^2{}_m + w^2{}_m) =$$

$$= \Sigma_m \frac{p}{2g}[(u_0 - u_m)^2 + (v_0 - v_m)^2 + (w_0 - w_m)^2] - \Sigma E \frac{\delta_m f}{dt}.$$

Es ist zu bemerken, daß das Glied $- \Sigma F \frac{\delta_m f}{dt}$ im Allgemeinen positiv ist, weil die der Kürze wegen mit F bezeichnete Quantität Bewegung $\int F \cos(F\delta f)\, dt$ gewöhnlich negativ ist; denn die unter dem Integralzeichen vorkommende Kraft F wirkt nach dem entgegengesetzten Sinne von $dp$ des wirklichen Fortgleitens der Berührungsflächen aneinander, und da sich diese Richtung des Fortgleitens während des Stoßes wenig ändert, so ist sie sehr wenig von der des Elementes $\delta_m f$, welches dem Ende des Stoßes entspricht, verschieden. Folglich ist die in Rede stehende Quantität der Bewegung negativ und das Glied $- \Sigma F \frac{\delta_m f}{dt}$; also positiv.

### Carnot's Lehrsatz.

Die vorhergehende Gleichung enthält den Carnot'schen Lehrsatz für den Stoß weicher oder unelastischer Körper, wo unter weichen oder unelastischen Körpern solche verstanden werden, welche nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben. Für solche Körper besteht also offenbar die Differenz zwischen der den Geschwindigkeiten vor dem Stoße und der den mittlern Geschwindigkeiten nach dem Stoße entsprechenden lebendigen Kraft aus zwei Theilen, nämlich: 1) aus der lebendigen Kraft, welche den durch den Stoß verlorenen oder gewonnenen, d. h. den Geschwindigkeiten entspricht, welche in Verbindung mit den nach dem Stoße stattfindenden Geschwindigkeiten die vor dem Stoße stattfindenden wiedergeben würden, und 2) aus der Summe der Produkte der den Reibungen während des Stoßes entsprechenden Quantitäten Bewegung mit den relativen Geschwindigkeiten der Reibung am Ende des Stoßes.

§. 55. Der vorhin gegebene Begriff weicher Körper, d. h. solcher, welche nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben, ist nur eine Abstraktion, welche in der Natur niemals realisirt vorkommt, und wenn man zuweilen diese Voraussetzung macht; so geschieht solches blos, um ein Maximum des durch den Stoß bewirkten Verlustes an Arbeit zu erhalten. In der Wirklichkeit bleiben die gegen einander gestoßenen Körper nicht miteinander in Berührung, sondern trennen sich vermöge einer Molekularrückwirkung, welche man Elasticität nennt und mehr oder weniger vollkommen sein kann. Die vollkommene Elasticität würde die Eigenschaft gewisser Körper sein, daß ihre Molekule nach dem Stoße genau dieselben Lagen wieder annehmen, wie vor dem Stoße, so daß die gegenseitigen Einwirkungen der Molekule gleiche und entgegengesetzte Größenzustände durchlaufen haben, wenn die gegenseitigen Entfernungen der Molekule wieder dieselben geworden sind, und von dem Augenblicke an, wo zwischen den in der Nähe der Berührung der beiden Körper liegenden Molekulen jede gegenseitige Wirkung aufhört, weder eine Schwingung, noch eine Verrückung statt findet. In diesem Falle würde durch den Stoß kein Verlust an lebendiger Kraft verursacht werden, selbst wenn man auch nur die mittlern Bewegungen nähme; denn da die gegenseitigen Einwirkungen der Molekule dieselben Werthe wieder annehmen, wenn ihre gegenseitigen Entfernungen wieder dieselben geworden sind; so sind die Integrale $\int R dr$ sämmtlich gleich Null, wenn sie vom Anfange der Molekularverrückungen bis zum Ende derselben genommen werden, und da die Molekule am Ende des Stoßes keine relativen Bewegungen gegen einander haben, so muß die lebendige Kraft für die mittlere Bewegung, welche die gesammte lebendige Kraft bildet, dieselbe bleiben. Diese Voraussetzung ist jedoch ebenfalls nur eine Abstraktion, welche für gewisse Körper und in besondern Fällen des Stoßes nur annähernd statt findet, wo sie, wie wir später bei den Anwendungen sehen werden, zur Bestimmung der Bewegung nach dem Stoße dient.

## Princip über die Bewegung des Schwerpunktes eines Systemes von Körpern, oder einer Maschine.

§. 56. Das in §. 38 für einen freien festen Körper angeführte Princip läßt sich leicht auf ein System von festen Körpern ausdehnen, welche eine beliebige Maschine bilden, selbst wenn

Stöße darin statt finden, wofern das System nur frei ist und zu den drei Koordinatenaxen parallele virtuelle Bewegungen annehmen kann, für welche sämmtliche virtuelle Geschwindigkeiten gleich und parallel sind. Um dieses zu beweisen, wollen wir wie in §. 38 verfahren und gleiche, zu den drei Axen parallele Geschwindigkeiten zu den virtuellen Geschwindigkeiten nehmen. Wenn wir die Bezeichnungen in §. 38 beibehalten, d. h. wenn U, V, W die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes des Systemes nach den drei Axen und $u$, $v$, $w$ die analogen Geschwindigkeiten eines beliebigen Molekules des Systemes von dem Gewichte $p$ bezeichnen; so erhalten wir, wenn wir die gemeinschaftlichen Faktoren beider Theile der Gleichungen (J), welche virtuelle Geschwindigkeiten sind, hinweglassen, die Gleichungen:

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma p \frac{du}{dt} &= \frac{dU}{dt} \Sigma p = \Sigma X, \\ \Sigma p \frac{dv}{dt} &= \frac{dV}{dt} \Sigma p = \Sigma Y, \\ \Sigma p \frac{dw}{dt} &= \frac{dW}{dt} \Sigma p = \Sigma Z, \end{aligned} \right.$$

in deren zweiten Theilen keine Glieder vorkommen, welche sich auf die Molekularwirkungen desselben Körpers, oder auf die zweier einander berührender Körper des Systemes, oder der Maschine beziehen; denn diese Wirkungen sind paarweise einander gleich und entgegengesetzt, und folglich sind die entsprechenden Summen in den zweiten Theilen der Gleichungen ebenfalls Null. Wir haben also für ein freies System von Körpern, oder für eine beliebige Maschine hier denselben Satz, wie in §. 38 für einen freien festen Körper, nämlich: »daß sich der Schwerpunkt eines völlig freien Systemes fester Körper, wie ein freier materieller Punkt bewegt, dessen Masse der des ganzen Systemes gleich ist, und auf welchen dieselben äußern Kräfte wirken, wie auf das System, oder die Maschine.

Wenn in dem Systeme Stöße statt finden, welche von äußern Körpern herrühren, so können die entsprechenden Kräfte zu denen gezählt werden, welche bei diesem Principe über die Bewegung des Schwerpunktes in Betracht kommen und die Bewegung des fingirten materiellen Punktes, welcher sich wie der Schwerpunkt bewegt, wird alsdann gerade so verändert, wie wenn die äußern Stöße unmittelbar auf diesen Punkt selbst ausgeübt würden. Wenn man die beiden Theile der obigen Gleichungen in Beziehung auf die Zeit integrirt, so wird das vorhin für die Kräfte ausgesprochene Princip auf die Quantitäten der Bewegung ausgedehnt, und man kann alsdann sagen: daß, wenn in dem Systeme von äußern Körpern herrührende Stöße statt finden, die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Systemes gerade so plötzlich geändert wird, wie wenn auf einen materiellen Punkt, dessen Masse der des ganzen Systemes gleich ist, die von diesen Stößen herrührenden Quantitäten der Bewegung direkt übertragen würden.

### Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

In dem besondern Falle, wo keine äußere Kraft auf das bewegliche System wirkt und nur die gegenseitigen Einwirkungen zwischen den Molekulen statt finden, können diese Wirkungen nicht zu den an dem Schwerpunkte angebrachten Kräften gezählt werden, weil sie sich, wenn sie an diesem Punkte angebracht wären, doch paarweise gegenseitig aufheben würden, und folglich hat dieser Schwerpunkt eine gleichförmige und geradlinige Bewegung, wie ein materieller Punkt, auf welchen keine Kraft wirkt, so daß also seine Quantität der Bewegung ungeändert bleibt. Dieser Satz wird das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes genannt. Wenn zwischen dem zu dem Systeme gehörigen Körpern Stöße statt finden, so wird dadurch die Bewegung des Schwerpunktes nicht geändert, und erfolgt gerade so, wie wenn diese Stöße nicht statt finden, weil die den Wirkungen dieser Stöße entsprechenden Glieder in den obigen Gleichungen verschwinden.

## Princip der Erhaltung der Momente der Quantitäten der Bewegung.

§. 57. Wenn auf das bewegliche System keine äußere Kraft wirkt und auf die Molekule der das System bildenden Körper in ihrem gewöhnlichen Zustande, oder während des Stoßes, wenn ein solcher zwischen den Körpern des Systemes statt findet, keine andern Kräfte, als ihre gegenseitigen Einwirkungen ausgeübt werden; so bleiben die Momente der Quantitäten der Bewegung sämmtlicher Molekule dieselben, wenn man diese Momente in Beziehung auf eine Axe nimmt, um welche sich das System frei drehen kann.

Man beweist diesen Satz, wenn man für ein System von Körpern ebenso verfährt, wie in §. 37 für einen einzelnen festen Körper verfahren ist, d. h. wenn man für die virtuellen Geschwindigkeiten diejenigen nimmt, welche sich aus der Annahme ergeben, daß man dem ganzen Systeme, als festen Körper betrachtet, eine

Rotationsbewegung um eine Axe ertheilt. Denn wenn man diese Axe wie in §. 37 zu der Axe der $z$ nimmt, so erhält man:

$$\Sigma \frac{p}{g}\left(x\frac{dv}{dt} - y\frac{du}{dt}\right) = \Sigma(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}).$$

Aber wenn die Kräfte **X** und **Y** von den gegenseitigen Einwirkungen der Molekule des Systemes, während ihres gewöhnlichen Nebeneinanderliegens, oder während des Stoßes herrühren, in welchem letztern Falle diese gegenseitigen Einwirkungen weit beträchtlicher werden; so sind die zweiten Theile der Gleichungen Null, weil die Momente zweier gleicher und entgegengesetzter Wirkungen eine Summe gleich Null geben. Man hat folglich:

$$\Sigma \frac{p}{g}\left(x\frac{dv}{dt} - y\frac{du}{dt}\right) = 0,$$

und wenn man in Beziehung auf die Zeit integrirt:

$$\Sigma \frac{p}{g}(xv - yu) = \mathrm{C},$$

wo **C** hier eine sich auf die Zeit beziehende Konstante ist. Der erste Theil dieser Gleichung ist die Summe der Momente der Quantität der Bewegungen, wenn man unter dem Momente einer Quantität der Bewegung für jedes Molekul das Moment einer fingirten Kraft versteht, welche auf dieses Molekul nach der Richtung seiner Geschwindigkeit wirkt und das Produkt aus seiner Masse $\frac{p}{g}$, und aus dieser Geschwindigkeit zum Maße hat.

Man hat also folgenden Satz: In einem beliebigen Systeme von Körpern, oder in irgend einer Maschine, worauf keine äußere Kraft wirkt, sondern nur die von der gegenseitigen Berührung oder dem Stoße der das System oder die Maschine bildenden Körper herrührenden Kräfte sind die Summen der Momente der Quantitäten der Bewegung aller Molekule des Systemes in Beziehung auf eine gerade Linie, welche für die virtuelle Bewegung als Rotationsaxe dienen kann, während der Dauer der Bewegung konstant.

Vermittelst dieses Principes kann man die Bewegung für zwei sich um gewisse feste Axen drehende Systeme nach dem Zusammstoßen bestimmen.

## Allgemeines Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit.

§. 58. Wir können nun das Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit auf eine aus einem Systeme fester Körper bestehende Maschine ausdehnen, indem wir zugleich auf die Reibungen, die Erschütterungen der Molekule und die Stöße Rücksicht nehmen. Zu dem Zwecke brauchen wir nur für jeden Bestandtheil der Maschine die mittlern Bewegungen zu nehmen, zu der Widerstandsarbeit die hinzuzufügen, welche von den Reibungen der einzeln Bestandtheile unter einander herrühren, und die Verluste an lebendiger Kraft in Rechnung zu bringen, welche von den Stößen herrühren, wenn dergleichen statt finden und die Körper nicht nahezu vollkommen elastisch sind. Wenn $T_m$ die Quantität Bewegungsarbeit bezeichnet, welche den äußern bewegenden Kräften während der Zeit entspricht, für welche man das Princip der Uebertragung der Arbeit anwenden will, $T_r$ die Quantität Widerstandsarbeit während derselben Zeit für die äußern Kräfte mit Einschluß der von den äußern Körpern herrührenden Reibungen, $T_f$ die durch die Reibungen zwischen den Maschinenbestandtheilen konsumirte Quantität Arbeit und endlich $T_c$ die von den Stößen, welche während der betrachteten Dauer der Bewegung haben statt finden können, konsumirte Quantität Arbeit; so hat man, wenn $w$ die Geschwindigkeit eines beliebigen Molekules des Systemes und $p$ das Gewicht desselben bezeichnet, nach dem in Vorhergehendem Gesagten offenbar:

$$T_m - T_r - T_f - T_c = \Sigma \frac{pw^2}{2g} - \Sigma \frac{pw_0^2}{2g},$$

wo $w_0$ die Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung bezeichnet.

Wenn die Bewegung für eine Zeit betrachtet wird, welche gegen die Zeit etwas beträchtlich ist, die erfordert wird, um die Maschine in Bewegung zu setzen, und derselben ihre größte lebendige Kraft zu ertheilen; so sind die Glieder $\Sigma \frac{pw^2}{2g}$, $\Sigma \frac{pw_0^2}{2g}$ gegen die übrigen Glieder sehr klein, oder wenigstens ist ihre Differenz sehr klein, und man kann alsdann mit einer sehr großen Annäherung setzen:

$$T_m = T + T_f + T_c.$$

Wenn $T'_m$ die den äußern Körpern von der Maschine mitgetheilte Bewegungsarbeit und $T'_f$ die durch die Reibung zwischen diesen äußern Körpern und denen der Maschine konsumirte Arbeit bezeichnet, welche auf die in §. 52 angegebene Weise bestimmt werden muß; so hat man:

$$T_r - T'_m = T'_f, \text{ oder } T_r = T'_m + T'_f,$$

und wenn man in den vorhergehenden Werth von $T_m$ substituirt:

$$T_m = T'_m + T'_f + T_f + T_c.$$

Diese Gleichung enthält den allgemeinsten Ausdruck des Principes der Uebertragung der Arbeit, woraus folgt, daß die von der Maschine auf äußere, ihrer Bewegung widerstehende Körper übertragene Bewegungsarbeit $T'_m$ kleiner ist, als die dieser Maschine mitgetheilte Bewegungsarbeit $T_m$, und daß der Unterschied dieser beiden Quantitäten Arbeit aus den Verlusten an Arbeit besteht, welche von den Reibungen der Maschinentheile unter sich und an den äußern in Bewegung gesetzten Körpern, so wie von den Stößen herrühren.

Wenn man diese Bewegungen nicht für eine sehr lange Zeit betrachtet und die Quantitäten Arbeit nur für eine Zeit nimmt, die mit der vergleichbar ist, welche erfordert wird, damit die Maschine von dem Beginnen ihrer Bewegung an ihre größte Geschwindigkeit bekommt; so kann man die Zu- oder Abnahme der Summe der lebendigen Kräfte nicht mehr vernachlässigen, und man muß setzen:

$$T_m = T'_m + T_f + T'_f + T_c + \Sigma \frac{pv^2}{2g} + \Sigma \frac{pv_0^2}{2g}.$$

Die Zunahme der Summe der lebendigen Kräfte, wenn eine solche existirt, findet nur auf Kosten der Bewegungsarbeit statt, welche größer werden muß, um diesen Zuwachs hervorzubringen; allein diese momentane Zunahme ist nicht verloren, weil, wenn später eine Abnahme der lebendigen Kraft statt findet, die Widerstandsarbeit $T'_m$ zunehmen kann, ohne daß $T_m$ zunimmt, und die Zunahme der lebendigen Kraft erscheint hier, wie bereits bemerkt worden, gewissermaßen wie eine reservirte Quantität Arbeit, welche restituirt wird, sobald sich die Bewegung verzögert.

### Bemerkungen über die Ausdehnung des Principes der Uebertragung der Arbeit auf biegsame und auf flüssige Körper.

Außer den festen oder starren Körpern wendet man bei den Maschinen auch Seile und Riemen an, und um in diesem Falle das Princip der Uebertragung der Arbeit anzuwenden, braucht man nur die Verluste in Rechnung zu bringen, welche von den in diesen biegsamen und dehnbaren Körpern statt findenden Molekularverrückungen herrühren. Die Beobachtung lehrt, daß diese Verluste sehr gering sind; denn wenn die beiden Enden eines Seiles, oder jedes andern stellvertretenden biegsamen Systemes in der Richtung ihrer Länge dieselbe Geschwindigkeit haben, so wird der Verlust an Arbeit durch die Differenz der Kräfte angegeben, welche sie in dieser Richtung erhalten, und da diese Differenz wenig beträchtlich ist; so gilt dasselbe auch von den entsprechenden Quantitäten Arbeit. Wir werden später auf die Bestimmungsart dieser Verluste zurückkommen; für den Augenblick genügt es, einzusehen, daß sie nicht beträchtlich sind.

Was die Flüssigkeiten anlangt, so müssen dieselben als Inbegriffe sehr kleiner fester Kugeln betrachtet werden, welche ohne merkliche Reibung an einander hingleiten können, und es hindert folglich nichts, das Princip der Uebertragung der Arbeit auf sie anzuwenden, wenn man auf die kleinen Verluste Rücksicht nimmt, welche von den Reibungen der Flüssigkeitstheilchen unter sich und von den etwa stattfindenden Stößen herrühren. Die Erfahrung lehrt, daß, wenn keine plötzlichen Stöße, sondern blos Reibungen der Flüssigkeitstheilchen unter sich stattfinden, die entsprechenden Verluste an Arbeit sehr gering sind.

## Drittes Kapitel.

### Allgemeine Betrachtungen über die Maschinen, welche zur Uebertragung der Bewegung eines Bewegers dienen.

§. 59. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Arbeit eine Größe ist, welche durch die Anwendung von Maschinen nicht vermehrt werden kann, und letztere sind blos dazu bestimmt, die bewegende Kraft, oder den von ihrem Angriffspunkte in einer gegebenen Zeit beschriebenen Weg zu vergrößern, oder zu verkleinern, diese Kraft oder diesen Weg in mehrere Theile zu zerlegen und ihre Lagen und Richtung zu verändern, oder mit einem Worte: diese Kraft und diesen Weg einem bestimmten Zwecke gemäß zu verändern, ohne daß jedoch die Arbeit jemals vergrößert werden kann. Der Theil dieser Arbeit, welchen die Maschinen wieder hervorbringen können, ist um so weniger von der auf sie übertragenen Arbeit verschieden, je geringer die in diesen Maschinen statt findenden Reibungen sind, und wenn man Maschinen konstruiren könnte, worin keine Reibungen statt fänden; so würde von der auf sie übertragenen Arbeit nichts verloren gehen.

Man kann die Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit durch Maschinen mit der Ausströmung einer Flüssigkeit vergleichen, welche sich in den Körpern verbreitet, indem sie durch die Berührungspunkte aus dem einen in den andern übergeht, sich in mehrere Ströme abtheilt, wenn ein einzelner Körper zugleich mehrere andere fortschiebt, und wovon umgekehrt mehrere Ströme in einen einzigen vereinigt werden, wenn mehrere Körper zugleich denselben Körper fortschieben. Diese Flüssigkeit könnte sich auch in gewissen Körpern anhäufen und darin so lange bleiben, bis sie durch neue Berührungspunkte oder durch Berührungspunkte von einer beträchtlichern Ausströmung austreten kann. Diese in den Körpern angehäufte oder reservirte Arbeit, welche wir eben mit einer Flüssigkeit verglichen haben, ist nichts anders, als die lebendige Kraft, und eine Maschine ist bei unserer Vergleichung in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes nichts anders, als ein in Bewegung befindliches System von Körpern, welches eine Art von Kanal bildet, durch welchen die Arbeit möglichst unvermindert nach gewissen Punkten übergehen kann. Diese Arbeit verliert sich allmählig in Folge der Reibungen und der Formveränderungen der Körper, oder sie geht in die Erde über, worin sie wegen der beträchtlichen Ausdehnung bald unmerklich wird.

Diese Arbeit bildet das Fundelement bei der Schätzung des Effektes der Beweger und auf ihre Bestimmung beziehen sich daher hauptsächlich alle Untersuchungen in ökonomischer Rücksicht bei der Anwendung von Bewegungsmaschinen, wie wir sogleich zeigen werden.

Alle zu unseren Bedürfnissen erforderlichen Verrichtungen bestehen zuletzt in der Bewegung, oder Formveränderung der Körper, wobei immer gewisse Widerstände überwunden und gewisse Kräfte ausgeübt werden müssen, und mithin ist eine solche durch eine Kraft bewirkte Bewegung, oder Formveränderung eine Nutzleistung oder Arbeit, welche, sie mag durch Thiere, bewegte Luft, Dampfdruck, oder Wassergefälle hervorgebracht werden, für jeden Ort und jede Zeit nur innerhalb gewisser Grenzen vorhanden ist, und nicht nach Belieben hervorgebracht werden kann.

Auch die Maschinen dienen nur zur Anwendung oder Ansammlung dieser Leistung oder Arbeit, ohne sie vergrößern zu können, und deshalb hat die Fähigkeit, eine solche Arbeit hervorbringen zu können sowohl, wie alle andern nützlichen Gegenstände, welche nicht im äußersten Uebermaße vorhanden sind, und welche man sich nicht ohne Kostenaufwand verschaffen kann, einen gewissen Werth, welcher in kommerzieller und ökonomischer Rücksicht in Betracht kommen kann.

Wenn wir keine Maschinen zu unserer Disposition hätten, so wären zwei verschiedene Verrückungen oder Bewegungen von Körpern zwei Dinge von verschiedener Natur, welche im Allgemeinen ihrem Werthe nach nicht mathematisch bestimmt werden könnten, und es verhielte sich hiermit, wie mit vielen andern nutzbaren Sachen, deren Werthe nicht mathematisch bestimmt werden. Aber die Maschinen geben, wie wir sogleich sehen werden, das Mittel an die Hand, solche Bewegungen auf eine ähnliche Weise ihrem Werthe nach zu bestimmen, wie man größere oder kleinere Quantitäten desselben Stoffes oder derselben Materie vergleicht und ihrem Werthe nach bestimmt

Wenn eine Maschine, worauf ein Beweger wirkt, zur Hervorbringung eines gewissen Nutzeffektes bestimmt ist, so wirken auf die Punkte derselben, welche auf die zu bewegenden oder zu verändernden Körper wirken, Widerstandskräfte; aber diese Widerstandskräfte sind im Allgemeinen nicht die einzigen, welche die Widerstandsarbeit hervorbringen, sondern es entstehen durch die Reibungen und die verschiedenen andern Widerstände, welche man nicht beseitigen kann, auch noch andere Widerstandsarbeiten, welche sich zu der von dem Nutzeffekte herrührenden hinzufügen. Da man sich jedoch vorstellen kann, daß diese andern Hindernisse nicht vorhanden sind und blos die von dem Nutzeffekte herrührenden Widerstandskräfte wirken, oder alle übrigen Widerstandskräfte so weit vermindert sind, daß sie gegen letztere ziemlich gering erscheinen; so kann man vorläufig annehmen, als wenn nur die von dem Nutzeffekte herrührenden Widerstandskräfte vorhanden wären. Man sieht übrigens leicht ein, wie man in der Praxis die aus dieser Voraussetzung abgeleiteten Schlüsse abändern muß, und wir wollen daher einstweilen annehmen, daß die ganze Widerstandsarbeit in der Hervorbringung des Nutzeffektes besteht.

Wenn man das Mittel hat, eine gewisse Bewegung hervorzubringen, indem man eine gewisse Kraft ausübt; so kann man vermittelst einer Maschine, welche die Bewegung und die Kräfte gehörig abändern kann, dieses Mittel oder diese Kraft zur Verrichtung einer gewissen Arbeit oder Fabrikation, z. B. zum Mahlen des Getraides, u. s. w. anwenden. Da aber das Mahlen desselben Quatums Getraide im Allgemeinen unter denselben Umständen statt findet, so folgt, daß die Punkte, auf welche die Maschine gewirkt hat, denselben Weg beschrieben und dieselbe Einwirkung erfahren haben, so daß also zu dem Mahlen desselben Quantums Getraide auch dieselbe Quantität Arbeit erfordert wird, welche wir Widerstandsarbeit genannt haben, und folglich ist diese auf die Maschine ausgeübte Widerstandsarbeit der Quantität des gemahlenen Getraides proportional. Da wir aber nach der Voraussetzung von den andern Widerständen als der des Nutzeffektes abstrahiren, so bildet diese Quantität Widerstandsarbeit auch die auf die Maschine übertragene Quantität Arbeit des Bewegers, und folglich ist diese letztere ebenfalls der gemahlenen Quantität Getraide proportional.

Um also zwei Beweger mit einander zu vergleichen, braucht man nur anzunehmen, daß man Maschinen habe, vermittelst welcher man sie zur Verrichtung derselben Arbeit, z. B. zum Mahlen des Getraides anwenden kann; denn die während derselben Zeit gemahlenen Quantitäten Getraide sind nahezu den während derselben Zeit von den Bewegern diesen Maschinen mitgetheilten Quantitäten Arbeit proportional. Nun verhalten sich aber die Werthe zweier Beweger offenbar wie die während derselben Zeit gemahlenen Quantitäten Getraide, und da sich die letztern wie die auf die Maschinen übertragenen Quantitäten Arbeit verhalten; so folgt, daß sich die Werthe der Motoren oder Beweger offenbar wie die Quantitäten Arbeit verhalten, welche sie auf diese Maschinen übertragen können.

Da man nun gegenwärtig leicht Maschinen konstruiren kann, auf welche man verschiedene Beweger wirken lassen kann, damit sie vermittelst dieser Maschinen dieselbe Art Arbeit verrichten; so hat man diese Beweger nach den Quantäten derselben Art Arbeit, welche sie in derselben Zeit verrichten können unter einander verglichen, und diese Art der Vergleichung hat sich durch die Vervollkommnung und Vervielfältigung der Maschinen immer weiter verbreitet, ungefähr eben so, wie durch die Erfindung und Vervollkommnung der zum Zertheilen der Materialien bestimmten Werkzeuge im Handel die Werthe dieser Materialien durch eine geometrische Größe, das Volumen bestimmt werden.

Bei dieser Art der Vergleichung des Werthes zweier Beweger haben wir zweierlei vorausgesetzt, nämlich 1) daß in allen Maschinen die von dem Nutzeffekte herrührende Widerstandsarbeit der Bewegungsarbeit gleich ist, und 2) daß die Herstellung und Unterhaltung der Maschinen keine Kosten verursachen. Es ist aber leicht einzusehen, daß diese Voraussetzungen nicht durchaus nothwendig sind, und daß unsere Schlüsse noch richtig bleiben, wenn man blos annimmt: 1) daß die von dem Nutzeffekte herrührende Widerstandsarbeit zwar nicht die ganze Widerstandsarbeit, aber dieser proportional ist, d. h. daß die von den Reibungen und jeder andern Ursache herrührenden Verluste an Arbeit der Bewegungsarbeit proportional sind, und 2) daß die Herstellungs- und Unterhaltungskosten der Maschine ebenfalls dieser Bewegungsarbeit proportional sind.

Diese Proportionalitäten, obgleich sie sich der Wahrheit weit mehr nähern, als die Annahme einer völligen Gleichheit zwischen der Bewegungsarbeit und der dem Nutzeffekte entsprechenden Widerstandsarbeit, finden dennoch im Allgemeinen in der Praxis nicht statt. Auch bezahlt man im Handel die Beweger nicht allein nach der Quantität Arbeit, welche sie hervorbringen können, sondern man nimmt dabei auch mehr oder weniger auf den Verlust an Arbeit Rücksicht, welcher in den anzuwendenden Maschinen von den Reibungen und von den übrigen fremdartigen Widerständen herrührt, und endlich bringt man auch die zur Herstellung und Unterhaltung dieser Maschinen erforderlichen Kosten in Anschlag. Aber immer muß man zuerst die Bewegungsarbeit berechnen, welche hervorgebracht werden kann, und die Grundbestimmung bildet, woran man alsdann die durch besondere Umstände veranlaßten Modificationen anbringen muß.

Es verhält sich bei der Bestimmung des Werthes der Beweger mit der Arbeit, wie mit mehreren Elementen geometrischer Messungen, welche ebenfalls auf Abstraktionen beruhen, und in der Praxis nur noch Annäherungen sind. Wenn man z. B. den Werth gewisser Körper durch die Messung ihrer Volumina bestimmt, wie dieses bei den Steinen und Hölzern geschieht, so nimmt man an, daß ein Körper von zwei Volumeneinheiten auch so viel Material giebt, als zwei Körper von derselben Art, wovon jeder nur eine Volumeneinheit hat. Um aber diese Vorstellung zu realisiren, muß man den ersten Körper durch Sägen oder Schneiden zertheilen, wodurch ein Theil desselben verloren geht, und da dieser Theil nicht mit dem Volumen in Verhältniß steht; so findet das geometrische Verhältniß zwischen den Volumen und dem wirklichen Geldwerthe des Körpers nicht mehr in aller Strenge statt. Es findet also in dieser Beziehung zwischen der Werthsbestimmung gewisser Körper nach ihrem Volumen und der der Beweger nach ihrer Arbeit eine vollkommene Analogie statt; denn die den in den Maschinen stattfindenden Reibungen entsprechenden Verluste an Arbeit entsprechen genau den Verlusten an Materie oder Substanz bei der Zertheilung der Körper, und die Herstellungs- und Unterhaltungskosten der Maschinen, welche erforderlich sind, um verschiedene Beweger zur Verfertigung verschiedener Quantitäten derselben Art von Arbeit anwenden und auf diese Weise diese Beweger nach den von ihnen hervorgebrachten Quantitäten Arbeit vergleichen zu können, entsprechen genau den Kosten, welche die Werkzeuge oder Maschinen verursachen, wodurch Körper von verschiedenem Volumen auf solche von gleichem Volumen zurückgeführt werden. Die für sämmtliche Kräfte eines Bewegers berechnete Arbeit spielt also bei der Bestimmung des Werthes dieses Bewegers dieselbe Rolle, wie das Volumen bei der Bestimmung des Werthes gewisser Substanzen. Hieraus kann man schon schließen, wie nothwendig die Bestimmung dieser Größe in der Theorie der Maschinen und der Motoren ist, wie man im Verlaufe dieses Werkes noch näher sehen wird.

Es wird nicht überflüssig sein, hier einer Schwierigkeit zu begegnen, welche man zuweilen in Beziehung auf das Maß des Werthes einer Bewegung durch die Arbeit, wie wir sie definirt haben, erhoben hat, indem man behauptet, daß die Zeit auch ein Element des Werthes der Bewegung oder des Transportes einer Masse sei, und namentlich die größere oder geringere Schnelligkeit mit in Betracht gezogen werden müsse.

In vielen Fällen ist es ohne Zweifel mehr oder weniger von Nutzen, daß ein gewisser mechanischer Effekt oder eine gewisse Bewegung mehr oder weniger schnell hervorgebracht wird; allein diese Art von Nutzen gehört zu denjenigen, welche kein bestimmtes Maß gestatten. Zwei ähnliche Bewegungen, wie z. B. der Transport zweier Lasten in verschiedenen Zeiten sind zwei Nutzleistungen von ganz verschiedener Natur, welche in Beziehung auf die Zeit keine geometrische Vergleichung gestatten. Wenn es übrigens darauf ankommt, vermittelst einer Maschine eine gewisse Quantität ähnlicher Bewegungen hervorzubringen, so ist dieses in vielen Fällen nicht kostspieliger, wenn es gleichzeitig, als wenn es successive geschieht, und es kann daher die Zeit hierbei nicht in Betracht kommen. Wenn z. B. zehn Menschen zum Heben von Lasten bestimmt sind, und man wünscht diese Arbeit schneller verrichtet zu haben, so kann man sehr wohl gleichzeitig zwanzig Menschen anwenden, ohne daß es mehr Kosten verursacht, dieselbe Arbeit in der Hälfte der Zeit verrichtet zu bekommen, und folglich kann auch hier die Zeit im Allgemeinen bei der Bestimmung des Werthes der Arbeit nicht in Betracht kommen. Wenn ferner eine Dampfmaschine ein Walzwerk treibt, und man will in einem Tage weit mehr Eisen produciren, wie gewöhnlich, so kann man gleichzeitig zwei solcher Maschinen anwenden, und alsdann, ohne daß es für ein bestimmtes Gewicht Eisen mehr Kohlen kostet, mit zwei Maschinen in einem Tage eben so viel Eisen produciren, als mit einer Maschine in zwei Tagen. Da man also die zu einer gewissen Fabrikation erforderliche Zeit ohne sehr beträchtliche Kostenvermehrung vermindern kann, so kann die Zeit im Allgemeinen bei der Bestimmung des Werthes der Arbeit nicht in Betracht kommen, und wenn dieses zuweilen geschehen kann, so liegen der Arbeit ganz fremdartige Ursachen zu Grunde.

Die Unterscheidung zwischen der Zeit und der Arbeit bei der Bestimmung des Werthes der Motoren ist der ganz analog, welche man bei dem Ankaufe gewisser Gegenstände zwischen der gekauften Quantität und der zur Lieferung derselben erforderlichen Zeit macht, und obgleich es oft sehr vortheilhaft sein kann, daß die allmählige Lieferung einer Waare in acht Tagen statt in einem Monate beendigt wird; so bleibt doch die Quantität dieser Waare immer das Hauptelement bei einem Handel.

Der Name Arbeit, welchen wir gewählt haben, scheint uns sehr dazu geeignet zu sein, einen genauen Begriff von der zu bezeichnenden Größe zu geben. Denn wenn man z. B. von der Arbeit spricht, welche ein Pferd täglich hervorbringt; so sieht man leicht ein, daß dieses das Produkt aus der Kraft ist, mit welcher das Pferd nach der Richtung des Weges ziehen kann, und aus der Länge dieses Weges, oder allgemeiner das Integral des Produktes aus dieser Kraft und dem Elemente dieses Weges. Desgleichen, wenn man sagt, daß der durch ein Kilogramm Kohlen gelieferte Wasserdampf eine gewisse Quantität Arbeit hervorbringt; so begreift man leicht, daß dieselbe nichts anders ist, als das Produkt aus dem auf den Kolben ausgeübten Drucke und aus dem beschriebenen Wege, oder das Integral des Produktes aus der Spannung des Dampfes und dem Differenziale des Weges.

Die Bedeutung der Ausdrücke Bewegungsarbeit, Widerstandsarbeit, Nutzarbeit und verlorene Arbeit, welche alle bei der Anwendung des Wortes Arbeit in der Theorie der Maschinen vorkommenden Unterscheidungen ausdrücken, sind für sich klar und bedürfen weiter keiner Rechtfertigung.

Da das Arbeitselement das Produkt aus einem unendlich kleinen Wege und einer nach der Richtung dieses Weges wirkenden Kraft ist, so scheint die der Krafteinheit und der Längeneinheit, d. h. dem Kilogramme und dem Meter entsprechende Arbeit als natürliche Arbeitseinheit genommen werden zu müssen; allein da die gewöhnlichen Beweger, wie das Wasser, die Thiere und der Dampf schon in kurzer Zeit Quantitäten Arbeit hervorbringen, welche bei dieser Einheit durch zu große und unbequeme Zahlen ausgedrückt würden; so pflegt man allgemein zur Arbeitseinheit diejenige zu nehmen, welche einer Kraft von 1000 Kilogrammen und einem Wege von 1 Meter in der Richtung dieser

Kraft entspricht. Diese Arbeitseinheit scheint die zweckmäßigste zu sein, weil sie weder zu klein, noch zu groß ist, so daß man weder zu oft Brüche, noch zu große Zahlen anzuwenden braucht. Die Arbeit, welche ein Mensch täglich hervorbringen kann, wird bei dieser Einheit durch Zehner, die eines Pferdes in derselben Zeit durch Tausender und die der Dampfmaschinen oder Wasserfälle ebenfalls für einen Tag durch Zehntausender ausgedrückt, welche Zahlen für den gewöhnlichen Gebrauch hinreichend bequem sind.

Es wäre zu wünschen, daß man für diese Arbeitseinheit allgemein einen passenden Namen einführte, und einige Mechaniker haben sie Dynamie genannt; allein wenn man einmal eine aus dem Griechischen abgeleitete Benennung anwenden will, so muß man auch die griechischen Wurzeln der Ausdrücke Kraft und Weg beibehalten, und wir werden uns daher im Verlaufe dieses Werkes zur Bezeichnung der Arbeitseinheit des Ausdruckes »Dynamode« bedienen. Es ist aber wohl zu bemerken, daß, wenn das Produkt aus einer Kraft und aus einem Wege eine Größe der Art sein soll, welche wir Arbeit genannt haben, die Kraft nach der Richtung dieses Weges geschätzt werden muß. In einigen Werken, worin Tabellen über die tägliche Quantität Arbeit der Menschen und Thiere unter verschiedenen Umständen mitgetheilt sind, hat man die Wege, welche ein Mensch oder ein Pferd mit verschiedenen Lasten auf verschiedenen Arten von Wegen zurücklegen kann, angegeben und das Produkt aus dem Wege und aus der Last in dieselbe Kolumne mit den Quantitäten Arbeit gesetzt und diesen Produkten denselben Namen gegeben; allein man muß, obgleich die Angabe solcher Resultate über den horizontalen Transport von Lasten sehr nützlich sein kann, das Produkt aus dem Wege und der Last nicht mit demselben Namen bezeichnen, wie das Produkt, welches wir Arbeit genannt haben.

Wenn man das Produkt aus einem Wege und aus einer auf seiner Richtung senkrechten Kraft ebenfalls mit dem Namen Arbeit bezeichnen wollte, so müßte zwischen diesen beiden Größen eine Art von Aequivalenz statt finden, so daß man gewissermaßen die eine in die andere verwandeln könnte, was offenbar nicht möglich ist. Dieselbe Arbeit kann mit einer auf der Richtung des Weges senkrechten Kraft begleitet sein, aber es kann dadurch keine Arbeit hervorgebracht werden, welche auf irgend eine Weise von dem Produkte aus dem beschriebenen Wege und einer Normalkraft abhängt, und umgekehrt kann eine gewisse Arbeit nicht einem Wege und einer Normalkraft entsprechen, deren Produkt in einem bestimmten Verhältnisse zu dieser Arbeit steht. Es findet zwischen diesen beiden Arten von Produkten keine nothwendige Beziehung statt, so daß man im Allgemeinen nicht von dem einen auf das andere schließen kann, und man muß sie daher auch nicht mit demselben Namen bezeichnen.

Man würde sogar einen Fehler begehen, wenn man dem Produkte aus einem Wege und aus einer auf seiner Richtung senkrechten Kraft einen bestimmten Namen geben wollte, weil die beiden Faktoren dieses Produktes mittelst Maschinen nicht in einander verwandelt werden können, wie dieses bei der Arbeit der Fall ist, und zwei gleiche Produkte in diesem Sinne im Allgemeinen nicht auf Größen anwendbar sind, welche eine gewisse Art von Aequivalenz haben. Wenn dieses unter besondern Umständen statt zu finden scheint, so liegt der Grund darin, daß die Kraft in der Richtung des Weges zuweilen eine Art von Reibung wird, welche nahezu dem Normaldrucke proportional ist, und daß alsdann die Arbeit ebenfalls dem Produkte aus dem beschriebenen Wege und diesem Normaldrucke proportional ist. Wie sich die beiden Elemente der Arbeit in einander verwandeln können, so kann dieses auch in dem gegenwärtigen Falle mit den beiden Elementen des andern Produktes geschehen; aber nur wegen der erwähnten Proportionalität, und sobald diese nicht mehr statt findet, kann man auch zwei Produkte aus zwei beschriebenen Wegen und zwei darauf senkrechten Kräften nicht mehr mit einander vergleichen.

Wenn z. B. Lasten durch Pferde auf derselben Art von Straßen fortgezogen werden, so ist das Gewicht der Last nahezu der Zugkraft, oder der Anzahl der anzuwendenden Pferde, proportional, und da sich fast alle Lasten zertheilen und auf mehrere Fuhrwerke transportiren lassen; so folgt, daß nahezu ebenso viele tägliche Pferdekräfte zum Transport einer gewissen Quantität Waaren auf eine gewisse Entfernung, als zum Transporte einer halb so großen Quantität Waaren auf die doppelte Entfernung erfordert werden, so daß man näherungsweise die Transportkosten auf einer bestimmten Art von Wegen als den Produkten aus den transportirten Gewichten und aus den beschriebenen Wegen proportional betrachten kann. Aber diese Proportionalität ist der Bedingung untergeordnet, daß man die Anzahl der Pferde, oder die Zugkraft, in der Richtung des beschriebenen Weges als dem Gewichte der zu transportirenden Last proportional betrachten kann, was voraussetzt, daß man nur ein und dieselbe Straße betrachtet; denn wenn sich diese ändert, so werden auch andere Grundlagen der Rechnung erfordert, eben weil sich die Größe ändert, welche wir Arbeit nennen die allein bei dieser Art von Transport angewandt werden kann. Wenn z. B. ein Fuhrmann für den Transport von 1000 Kilogrammen auf 10 Meilen eine Fracht von 10 Thalern verlangt auf gewissen Straßen, so wird derselbe für dieselbe Last und dieselbe Entfernung 20 Thaler Fracht verlangen, wenn wegen des schlechten Zustandes der Straße die doppelte Anzahl von Pferden erforderlich ist, so daß also wieder die Arbeit, wie wir sie definirt haben, die wahre Grundlage bei diesen Bestimmungen bildet.

## Berechnung der Reibungen bei den Anwendungen.

§. 60. Wir wollen uns nun mit den in den Maschinen statt findenden Reibungen beschäftigen, indem wir uns auf die allgemeinen Fälle beschränken, welche gewöhnlich bei den Anwendungen vorkommen.

Nach den bekannten Versuchen über die Reibung findet zwischen dem Normaldrucke auf die Berührungsflächen und der Tangentialkraft, welche die Reibung genannt wird, ein von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängiges konstantes Verhältniß statt, und man findet in den Lehrbüchern der praktischen Mechanik die Tabelle dieser Verhältnisse für die bei den Maschinen am häufigsten angewandten festen Körper. Zur Bestimmung der von den Reibungen herrührenden Verluste an Arbeit muß man kennen: 1) die auf die Berührungspunkte wirkenden Druckkräfte und 2) das Element des Fortgleitens der ursprünglichen Berührungspunkte in Beziehung auf einander während des Stattfindens der Reibung. Da die Bestimmung der Druckkräfte das Nächste ist, womit man sich bei dieser Untersuchung beschäftigen muß, so wollen wir zuvörderst an einem Beispiele zeigen, welchen Gang man dabei befolgen muß.

Wir wollen uns ein festes System denken, welches sich um eine horizontale Axe dreht, die mit zwei Zapfen an ihren Enden auf festen Lagern ruht, und annehmen, daß auf dieses System zwei äußere Kräfte $P, P'$ wirken, welche in Normalebenen auf dieser Axe liegen, und deren Momente in Beziehung auf diese Axe $Pp$, $P'p'$ sind. Ferner seien $\alpha$, $\alpha'$ die Winkel, welche die Richtung dieser Kräfte mit der Horizontale bilden und $\Pi$ bezeichne das Gewicht des Systemes.

Die auf die Zapfen wirkenden Kräfte müssen so beschaffen sein, daß zwischen den äußern Kräften und den Kräften, welche den Molekulen des Systemes, wenn sie völlig frei wären, die Bewegung ertheilen könnten, welche sie wirklich annehmen, Aequivalenz statt findet. Da alle Kräfte in Normalebenen auf der Axe liegen, so hat man keine Komponenten nach der Richtung dieser Axen zu betrachten, und folglich nur Gleichungen aufzustellen, welche sich auf die Summen der Komponenten der in Normalebenen auf der Drehungsaxe des Systemes liegenden Kräfte beziehen, und Gleichungen, welche sich auf die Summen der Momente dieser Kräfte beziehen.

Wir wollen die Drehungsaxe zur Axe der $z$ und den Mittelpunkt eines Zapfens zum Anfangspunkte der $z$ nehmen, und wie gewöhnlich mit $u$, $v$ die horizontalen und vertikalen Komponenten der Geschwindigkeiten bezeichnen. Es seien $\zeta$, $\zeta'$ die Entfernungen der durch die Richtungen der Kräfte $P$, $P'$ gelegten Vertikalebenen vom Anfangspunkte, $l$ das Intervall zwischen den beiden Zapfen und $\rho$, $\rho'$ die Halbmesser dieser Zapfen, welche Größen sämmtlich als gegeben angesehen werden. Ferner seien $Q$, $Q'$ die auf diese Zapfen wirkenden Normalkräfte und $\beta$, $\beta'$ die Winkel, welche die Richtungen dieser Kräfte mit den in ihren Vertikalebenen, die auf der Drehungsaxe senkrecht stehen, wenn die Zapfen cylindrisch sind, gezogenen Horizontalen bilden, wo diese vier Größen $Q$, $Q'$, $\beta$, $\beta'$ zu bestimmen sind, und endlich seien $f$, $f'$ die Verhältnisse der Reibungen zu den Normaldruckkräften.

Wenn man bemerkt, daß $Q$ und $fQ$ auf einander senkrecht sind, so ist der Sinus des Winkels, welchen die Reibung $fQ$ mit der Horizontale bildet, offenbar $= -\cos\beta$ und der Kosinus desselben Winkels $= \sin\beta$, und da die Kräfte $P$, $P'$ nach der Voraussetzung das System im entgegengesetzten Sinne zu drehen streben; so geben die sechs Gleichungen der Aequivalenz der auf einen festen Körper wirkenden Kräfte die fünf folgenden Gleichungen, indem die sechste von selbst erfüllt wird, weil sie sich auf die Summe der Komponente nach der Richtung der Rotationsaxe bezieht, welche sämmtlich Null sind:

$$\Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt} = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + Q\cos\beta + Q'\cos\beta' + fQ\sin\beta + f'Q'\sin\beta',$$

$$\Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + Q\sin\beta + Q'\sin\beta' - fQ\cos\beta - f'Q'\cos\beta',$$

$$\Sigma \frac{p}{g}\left(x\frac{dv}{dt} - y\frac{du}{dt}\right) = Pp - P'p' - fQ\rho - f'Q'\rho',$$

$$\Sigma \frac{p}{g} z \frac{dv}{dt} = \zeta P\sin\alpha + \zeta' P'\sin\alpha' + lQ\sin\beta - lfQ\cos\beta,$$

$$\Sigma \frac{p}{g} z \frac{du}{dt} = \zeta P\cos\alpha + \zeta' P'\cos\alpha' + lQ\cos\beta + lfQ\sin\beta.$$

Wenn $\vartheta$ den Winkel bezeichnet, welchen eine durch die Drehungsaxe gelegte Ebene beschreibt, indem sie mit dem Systeme herumbewegt wird, und $r$ den von der Axe nach einem beliebigen Punkte des Körpers gezogenen Radiusvektor; so hat man:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta,$$

folglich:

$$dx = -y\,d\vartheta, \quad dy = x\,d\vartheta,$$

$$u = -y\frac{d\vartheta}{dt}, \quad v = x\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\frac{du}{dt} = -x\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - y\frac{d^2\vartheta}{dt^2}; \quad \frac{dv}{dt} = -y\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2\vartheta}{dt^2};$$

oder wenn man $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ setzt:

$$\frac{du}{dt} = -\omega^2 x - y\frac{d\omega}{dt}; \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 y + x\frac{d\omega}{dt}.$$

Vermittelst dieser Werthe verwandeln sich die fünf Gleichungen der Bewegung in folgende:

$$-\frac{\omega^2}{g}\Sigma px - \frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma py$$
$$= \mathrm{P}\cos\alpha + \mathrm{P}'\cos\alpha' + \mathrm{Q}\cos\beta + \mathrm{Q}'\cos\beta' + f\mathrm{Q}\sin\beta + f'\mathrm{Q}'\sin\beta',$$
$$-\frac{\omega^2}{g}\Sigma py + \frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma px$$
$$= \mathrm{P}\sin\alpha + \mathrm{P}'\sin\alpha' + \mathrm{Q}\sin\beta + \mathrm{Q}'\sin\beta' - f\mathrm{Q}\cos\beta - f'\mathrm{Q}'\cos\beta',$$
$$\frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma pr^2 = \mathrm{P}p - \mathrm{P}'p' - f\mathrm{Q}\rho - f'\mathrm{Q}'\rho',$$
$$-\frac{\omega^2}{g}\Sigma pyz + \frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma pxz = \zeta\mathrm{P}\sin\alpha + \zeta'\mathrm{P}'\sin\alpha' + l\mathrm{Q}\sin\beta - lf\mathrm{Q}\cos\beta,$$
$$-\frac{\omega^2}{g}\Sigma pxz + \frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma pyz = \zeta\mathrm{P}\cos\alpha + \zeta'\mathrm{P}'\cos\alpha' + l\mathrm{Q}\cos\beta + lf\mathrm{Q}\sin\beta.$$

Bei den gewöhnlichen Anwendungen liegt der Schwerpunkt des Systems auf der Drehungsaxe, und es ist folglich:

$$\Sigma px = 0, \quad \Sigma py = 0.$$

Ferner wird der Körper gewöhnlich von einer Rotationsfläche begrenzt, deren Axe mit der Drehungsaxe zusammenfällt, oder wenigstens ist dieser Körper in Beziehung auf die Ebene der $xz$ und die der $yz$ symmetrisch, und folglich hat man:

$$\Sigma pxz = 0, \quad \Sigma pyz = 0,$$

weil diese Summen aus Gliedern bestehen, welche paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind. In diesem Falle verwandeln sich also die fünf Gleichungen der Bewegungen in folgende:

(1) $\mathrm{P}\cos\alpha + \mathrm{P}'\cos\alpha' + \mathrm{Q}(\cos\beta + f\sin\beta) + \mathrm{Q}'(\cos\beta' + f'\sin\beta') = 0,$

(2) $\mathrm{P}\sin\alpha + \mathrm{P}'\sin\alpha' + \mathrm{Q}(\sin\beta - f\cos\beta) + \mathrm{Q}'(\sin\beta' - f'\cos\beta') = 0.$

(3) $\frac{d\omega}{dt}\cdot\Sigma\frac{p}{g}r^2 = \mathrm{P}p - \mathrm{P}'p' - f\mathrm{Q}\rho - f'\mathrm{Q}'\rho',$

(4) $\zeta\mathrm{P}\sin\alpha + \zeta'\mathrm{P}'\sin\alpha' + l\mathrm{Q}(\sin\beta - f\cos\beta) = 0,$

(5) $\zeta\mathrm{P}\cos\alpha + \zeta'\mathrm{P}'\cos\alpha' + l\mathrm{Q}(\cos\beta + f\sin\beta) = 0.$

Setzen wir:

$$(6)\qquad \begin{cases} Q(\cos\beta + f\sin\beta) = X; & Q'(\cos\beta' + f'\sin\beta') = X'; \\ Q(\sin\beta - f\cos\beta) = Y; & Q'(\sin\beta' - f'\cos\beta') = Y'; \end{cases}$$

folglich:

$$(7)\qquad Q = \sqrt{\frac{X^2+Y^2}{1+f^2}},\quad Q' = \sqrt{\frac{X'^2+Y'^2}{1+f^2}},$$

so geben die Gleichungen (1), (2), (4) und (5):

$$(8)\qquad \begin{cases} X = -\dfrac{\zeta P\cos\alpha + \zeta' P'\cos\alpha'}{l}, \\ Y = -\dfrac{\zeta P\sin\alpha + \zeta' P'\sin\alpha'}{l}, \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} X' = -\dfrac{(l-\zeta)P\cos\alpha + (l-\zeta')P'\cos\alpha'}{l}, \\ Y' = -\dfrac{(l-\zeta)P\sin\alpha + (l-\zeta')P'\sin\alpha'}{l}. \end{cases}$$

Um die Punkte zu finden, worin die Reibungen statt finden, muß man die Größen $\cos\beta$, $\sin\beta$, $\cos\beta'$, $\sin\beta'$ bestimmen. Aus den Gleichungen (6) ergeben sich aber die Ausdrücke:

$$(10)\qquad \cos\beta = \frac{X-fY}{Q(1+f^2)};\quad \sin\beta = \frac{Y-fX}{Q(1+f^2)};$$

$$(11)\qquad \cos\beta' = \frac{X'-f'Y'}{Q'(1+f'^2)};\quad \sin\beta' = \frac{Y'+f'X'}{Q'(1+f'^2)},$$

in welche man für $Q$, $Q'$ ihre Werthe (7) und dann für $X$, $Y$, $X'$, $Y'$ ihre Werthe (8) und (9) setzen müßte.

Zur Vereinfachung der Rechnungen wollen wir mit $\varphi$ den Winkel bezeichnen, dessen Tangente $f$ ist, durch $R$, $R'$ die resp. Resultanten aus $X$, $Y$ und $X'$, $Y'$ und mit $a$, $a'$ die Winkel, welche $R$, $R'$ mit der Horizontale bilden, und endlich wollen wir annehmen, wie es auch gewöhnlich der Fall ist, daß die Verhältnisse $f$ und $f'$ einander gleich sind.

Da die Kraft $R$ die Resultante aus der Summe $X$ der horizontalen Komponenten von $Q$ und von $fQ$ und aus der Summe $Y$ der vertikalen Komponenten dieser beiden letzten Kräfte ist; so hat man:

$$R = \sqrt{X^2+Y^2},$$

und da $\frac{1}{\sqrt{1+f^2}} = \cos\varphi$ ist, so verwandeln sich die Werthe von Q und Q′ in folgende:

$$Q = R \cos \varphi,$$
$$Q' = R' \cos \varphi,$$

und außerdem hat man:

$$X = R \cos a, \quad Y = R \sin a,$$
$$X' = R' \cos a', \quad Y' = R' \sin a'.$$

Vermittelst dieser Werthe können die Gleichungen (10) und (11), welche die Werthe von $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\sin\beta'$, $\cos\beta'$ geben, auf folgende Form gebracht werden:

$$\cos\beta = \cos(a + \varphi), \quad \sin\beta = \sin(\alpha + \varphi),$$
$$\cos\beta' = \cos(a' + \varphi), \quad \sin\beta' = \sin(a' + \varphi),$$

woraus folgt:

$$\beta = a + \varphi, \quad \beta' = a' + \varphi.$$

Die in der Gleichung (3) vorkommende Größe $\Sigma \frac{p}{g} r^2$ wird gewöhnlich das Trägheitsmoment des Systemes in Beziehung auf die Drehungsaxe genannt, und wenn man dasselbe mit $k$ bezeichnet; so kann die Gleichung (3) auf folgende Form gebracht werden:

$$k \frac{d\omega}{dt} = Pp - P'p' - \sin\varphi (R\rho + R'\rho'),$$

oder wenn man $\rho' = \rho$ setzt, wie es häufig der Fall ist:

$$k \frac{d\omega}{dt} = Pp - P'p' - \rho \sin\varphi (R + R').$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit, wenn man die Kräfte P, P′ für jeden Augenblick kennt. Gewöhnlich sind diese Kräfte zu einander parallel, oder auf einander senkrecht. Wenn sie parallel sind, so wirken sie gewöhnlich nach der Richtung der Vertikale von oben nach unten, und wenn man die Axe der $y$ in der Richtung dieser Kräfte nimmt, so hat man:

$$\alpha = \alpha' = 270^0, \quad \sin\alpha = \sin\alpha' = -1, \quad \cos\alpha = \cos\alpha' = 0,$$

folglich:

$$X = 0,\ Y = \frac{\zeta P + \zeta' P'}{l},$$

$$X' = 0,\ Y' = \frac{(l-\zeta)P + (l-\zeta')P'}{l}.$$

Es ist mithin:

$$Q = Y, \quad Q' = Y';$$

aber:

$$a = a' = 90^0, \quad \sin a = \sin a' = 1,$$

folglich:

$$Y = R, \quad Y' = R';$$

also:

$$R + R' = Y + Y' = P + P'$$

und die Gleichung für die Winkelbewegung verwandelt sich in folgende:

$$k\, \frac{d\omega}{dt} = Pp - P'p' - \rho \cos\varphi\,(P + P').$$

Wenn die Kräfte P, P′ auf einander senkrecht sind, und $\alpha = 180^0$, $\alpha' = 270^0$ ist, folglich:

$$\sin\alpha = 0,\ \cos\alpha = -1,\ \sin\alpha' = -1,\ \cos\alpha' = 0,$$

so kommt:

$$X = \frac{\zeta P}{l}, \qquad Y = \frac{\zeta' P'}{l},$$

$$X' = \frac{(l-\zeta)P}{l}, \quad Y' = \frac{(l-\zeta')P'}{l}.$$

Aus den Gleichungen:

$$X = R\cos a \text{ und } Y = R\sin a$$

ergibt sich:

$$\operatorname{tang} a = \frac{X}{Y},$$

folglich:

$$\operatorname{tang} a = \frac{\zeta P}{\zeta' P'},$$

und ebenso ist:

$$\operatorname{tang} a' = \frac{(l-\zeta)P}{(l-\zeta')P'}.$$

Die übrigen Größen werden wie in dem allgemeinen Falle bestimmt. Wenn die Kräfte P, P′ während der Bewegung der Größe und Richtung nach konstant sind, so werden die von den Zapfenreibungen herrührenden Verluste an Arbeit für die Sekunde ausgedrückt durch:

$$2\pi n \rho f Q \quad \text{und} \quad 2\pi n \rho' f' Q',$$

wo $n$ die Anzahl der Umdrehungen in der Zeiteinheit bezeichnet, und wenn $f' = f$, $\rho' = \rho$ ist, so wird der Totalverlust ausgedrückt durch:

$$2\pi n \rho f (Q + Q'),$$

wo die Druckkräfte Q, Q′ nach den frühern Formeln berechnet werden.

Berechnung des Druckes, welchen zwei Zähne des Eingriffes zweier Rotationssysteme, deren Bewegung nicht gleichförmig ist, auf einander ausüben.

§. 61. Wir wollen nun zwei Rotationssysteme betrachten, welche in Zapfenlagern ruhen, und in ihrer Bewegung durch den Eingriff zweier Zahnräder mit einander verbunden und deren Axen parallel sind. Wir wollen annehmen, daß eine von einem beliebigen Beweger herrührende Kraft P (Fig. 11) auf das erste System in A in einer Entfernung $p$ von der Drehungsaxe dieses Systemes und eine Widerstandskraft P′ in C auf das zweite System in einer Entfernung $p'$ von seiner Drehungsaxe wirkt; so entsteht in dem Berührungspunkte B zweier Zähne des Eingriffes ein gegenseitiger Druck Q, welcher nach der Richtung der Normale in dem Berührungspunkte wirkt. Wenn man sich durch den Punkt B eine auf den beiden Drehungsaxen senkrechte Ebene denkt, so bestimmt dieselbe auf diesen Axen zwei Punkte, welche man die Mittelpunkte der beiden Systeme nennen kann. Es seien $q$, $q'$ die aus diesen Mittelpunkten auf die Normale im Punkte B und $s$, $s'$ die aus denselben Punkten auf die Tangente gefällten Perpendikel. Ferner bezeichne $f$ das Verhältniß der Reibung zum

Drucke, so läßt sich die gegenseitige Einwirkung der beiden Zähne im Berührungspunkte in eine Normalkraft Q und in eine Tangentialkraft $f$Q zerlegen. Wir wollen zunächst die Zapfenreibungen unberücksichtigt lassen, mit $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des ersten Systemes und mit $k$ das Trägheitsmoment desselben in Beziehung auf die Drehungsaxe bezeichnen; so haben wir die Gleichung der Momente:

$$k\,\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{P}p - \mathrm{Q}q \mp f\,\mathrm{Q}\,s. \qquad \text{(A)}$$

Wenn wir durch dieselben accentuirten Buchstaben die analogen Größen für das zweite System bezeichnen, so haben wir die zweite Gleichung:

$$k'\,\frac{d\omega'}{dt} = -\mathrm{P}'p' + \mathrm{Q}q' \pm f'\,\mathrm{Q}s', \qquad \text{(B)}$$

wo die Wahl des obern oder untern Zeichens von dem Sinne des Gleitens, welcher sich nach gewissen Bedingungen ändern kann, wie wir später zeigen werden, abhängt.

Die Winkelgeschwindigkeiten $\omega$ und $\omega'$ sind durch die Bedingung der Berührung mit einander verbunden; denn wenn man die Bewegung während eines unendlich kleinen Zeittheilchens betrachtet, so kann man annehmen, daß das Berührungselement parallel zu sich selbst fortrückt, und wenn alsdann die Berührung noch statt finden soll; so müssen die Geschwindigkeiten beider Körper im Berührungspunkte gleiche Normalkomponenten haben. Aber diese Normalkomponenten des kleinen von dem Berührungspunkte beschriebenen Weges sind resp. den in derselben Zeit von den Fußpunkten der Perpendikel $q$, $q'$ beschriebenen kleinen Bogen gleich, und da sich diese Perpendikel während derselben Zeit nur unendlich wenig ändern; so kann man diese kleinen Bogen, als Kreisbogen von den Halbmessern $q$, $q'$ betrachten. Die Bedingung ihrer Gleichheit wird folglich ausgedrückt durch:

$$q\,d\omega = q'\,d\omega'.$$

Da bei den gewöhnlichen Verzahnungen der Berührungspunkt zweier Zähne nahezu in der Ebene der beiden Axen liegt, so sind die Verhältnisse $\frac{q}{s}$ $\frac{q'}{s'}$ einander gleich. Wenn man Q zwischen den Gleichungen (A), (B) eliminirt und die Gleichheit dieser Verhältnisse berücksichtigt, so findet man:

$$kq'\,\frac{d\omega}{dt} + k'q\,\frac{d\omega'}{dt} = \mathrm{P}pq' - \mathrm{P}'p'q,$$

und da aus der Relation $q d\omega = q' d\omega'$ folgt $q \frac{d\omega}{dt} = q' \frac{d\omega'}{dt}$, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$\left(\frac{kq'^2 + k'q^2}{q'}\right) \frac{d\omega}{dt} = \mathrm{P}pq' - \mathrm{P}'p'q,$$

oder:

$$\left(k + k' \frac{q^2}{q'^2}\right) \frac{d\omega}{dt} = \mathrm{P}p - \mathrm{P}'p'. \frac{p}{q'}.$$

Man kann diese letzte Gleichung leicht im Gedächtnisse behalten, wenn man bemerkt, daß man für ein Rotationssystem, wenn die Zapfenreibungen wieder unberücksichtigt bleiben, hätte:

$$k \frac{d\omega}{dt} = \mathrm{P}p - \mathrm{P}'p'.$$

Um also auch das zweite System in Betracht zu ziehen, multiplicirt man das Moment des Widerstandes P′ dieses zweiten Systemes mit dem Koefficienten $\frac{q}{q'}$ und addirt zugleich zu dem Trägheitsmomente $k$ des ersten Systemes das Produkt aus dem Trägheitsmomente $k'$ des zweiten und aus dem Quadrate des Verhältnisses $\frac{q}{q'}$.

Wenn die Berührungsebene in dem Berührungspunkte der beiden Zähne durch die Axen der beiden Systeme geht, wie dieses gewöhnlich der Fall ist, und man bezeichnet mit $r$, $r'$ die von den Mittelpunkten der Systeme nach dem Berührungspunkte der Zähne gehenden Radienvektoren; so ist $q = r$, $q' = r'$ und die vorhergehende Gleichung für beide Systeme verwandelt sich alsdann in folgende:

$$\left(k + k' \frac{r^2}{r'^2}\right) \frac{d\omega}{dt} = \mathrm{P}p - \mathrm{P}'p'. \frac{r}{r'},$$

woraus folgt:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{P}p - \mathrm{P}'p'. \frac{r}{r'}}{k + k'. \frac{r^2}{r'^2}}.$$

Da in diesem Falle $s$, $s'$ Null, oder wenigstens sehr klein sind, so hat die Reibung in den obigen Gleichungen (**A**), (**B**) nur wenig Einfluß, und man kann setzen:

$$k\,\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{P}p - \mathrm{Q}r\,,\quad k'\,\frac{d\omega'}{dt} = -\mathrm{P}'p' + \mathrm{Q}r'.$$

Wenn man in die erste dieser beiden Gleichungen den Werth von $\frac{d\omega}{dt}$ substituirt, so findet man:

$$\mathrm{Q} = \frac{k\mathrm{P}'p'r' + k'\mathrm{P}pr}{kr^2 + k'r^2} = \frac{\frac{k}{r^2}\,\mathrm{P}'\,\frac{p'}{r'} + \frac{k'}{r'^2}\,\mathrm{P}\,\frac{p}{r}}{\frac{k}{r^2} + \frac{k'}{r'^2}}\,.$$

Zur Vereinfachung dieses Werthes wollen wir $\frac{\mathrm{P}p}{r} = \mathrm{P}_1$, $\frac{\mathrm{P}'p'}{r'} = \mathrm{P}'_1$ setzen, so kommt:

$$\mathrm{Q} = \frac{\frac{k}{r^2}\,\mathrm{P}'_1 + \frac{k'}{r'^2}\,\mathrm{P}_1}{\frac{k}{r^2} + \frac{k'}{r'^2}}\,.$$

Für die Koefficienten $\frac{k}{r^2}$, $\frac{k'}{r'^2}$ kann man Gewichte $\Pi$, $\Pi'$ setzen, welche in dem Berührungspunkte der Zähne angebracht, in Beziehung auf die resp. Axen der beiden betrachteten Systeme dieselben Trägheitsmomente haben würden; denn es wäre alsdann z. B. $\Pi r^2 = k$, folglich $\frac{k}{r^2} = \Pi$, und man kann folglich setzen:

$$\mathrm{Q} = \frac{\Pi\mathrm{P}'_1 + \Pi'\mathrm{P}_1}{\Pi + \Pi'}\,. \qquad (\mathrm{Z})$$

Diese Gleichung läßt sich leicht auf den Fall mehrerer rotirender Systeme erstrecken, und man würde alsdann finden, daß $\Pi$ das Gewicht bezeichnen müßte, welches in die Berührungspunkte gebracht und mit einem der berührenden Zähne fest verbunden, so daß es dessen Geschwindigkeit annähme, dieselbe lebendige Kraft haben würde, als die Gesammtheit der Rotationssysteme, welche auf der diesem Zahn entsprechenden Seite liegen, und das Gewicht $\Pi'$ würde für die dem andern Zahne und der andern Seite der Berührung entsprechenden Rotationssysteme eine ganz analoge Bedeutung haben.

Aus dem vorhergehenden Ausdrucke von Q ergiebt sich also folgender Lehrsatz:

Wenn man für einen Inbegriff rotirender Systeme, welche einander durch Verzahnungen in Bewewegung setzen, für jede Seite der Berührung in der Ordnung oder Folge der Uebertragung der Bewegung die Kraft berechnet, welche in dem Berührungspunkte angebracht, alle übrigen ersetzen kann, so wie das Gewicht, welches in diesem Punkte, mit dem Zahne fest verbunden, also seine Geschwindigkeit habend, dieselbe lebendige Kraft haben würde, als alle Rotationssysteme auf dieser nämlichen Seite, dann jede Kraft durch das der entgegengesetzten Seite entsprechende Gewicht multiplicirt und die Summe der Produkte durch die Summe dieser Gewichte dividirt; so erhält man den Druck, welchen zwei Zähne während der Bewegung auf einander ausüben.

Wenn die Kräfte **P**, **P′** in einer solchen Beziehung zu einander ständen, daß sie weder Bewegung hervorbringen, noch die bereits stattfindende Bewegung verändern könnten, d. h. wenn diese Kräfte einander das Gleichgewicht hielten, so wären die fingirten Kräfte $P_1$, $P'_1$ einander gleich, und man hätte folglich in diesem Falle:

$$Q = P_1 = P'_1$$

wie bekannt ist. Alsdann verschwinden die Trägheitsmomente als gemeinschaftliche Faktoren, wie zu erwarten war, weil die Auflösung der Aufgabe nur noch von statischen Betrachtungen abhängt.

Aus der vorhergehenden Formel (**Z**) ergibt sich eine wichtige und wohl zu beachtende Folgerung.

Bei vielen Anwendungen ist nämlich die Wirkung einer der Kräfte, z. B. $P'_1$ intermittirend, d. h. die Intensität dieser Kraft ändert sich auch während desselben Umganges des Systemes beträchtlich, was namentlich der Fall ist, wenn Hämmer, oder Stampfer in Bewegung gesetzt werden sollen. In diesem Falle wirkt die Kraft **P′** nur nach Intervallen, indem sie in gewissen Augenblicken Null ist, und dann wieder mit einer ziemlich beträchtlichen Intensität wirkt. Nun sieht man aber aus der vorhergehenden Gleichung, daß der im Berührungspunkte stattfindende Druck **Q** zwar seinen Werth mit $P_1'$ zu gleicher Zeit ändert; aber doch um so weniger, je kleiner der Koefficient von $P_1'$ gegen den von $P_1$ ist, so daß folglich der Einfluß einer der Kräfte $P_1'$ auf den Druck **Q** durch die Größe des Koefficienten $\Pi'$ für das entsprechende System vermindert wird. Will man also den Druck zwischen den Zähnen eines Räderwerkes, welches die Bewegung auf einen großen Schmiedehammer überträgt möglichst gleichförmig machen, so muß das Rotationssystem zwischen den Zähnen und dem Hammer in Beziehung auf den Berührungspunkt der Zähne ein möglichst großes Trägheitsmoment haben.

Wenn man nach dem im Berührungspunkte stattfindenden Drucke **Q** die Reibungen berechnen will, so braucht man den Druck zuvörderst nur nach den vorhergehenden Formeln zu berechnen, indem man die Reibungen unberücksichtigt läßt, und dann den so erhaltenen Werth von Q zur Berechnung dieser Reibungen anwendet. Der hierbei begangene Fehler ist offenbar sehr klein.

## Reibung der Zahnräderwerke.

§. 62. Um sogleich alle möglichen Fälle in dieselbe Formel zusammen zu fassen, wollen wir annehmen, daß die Ebenen der beiden Räder einen gewissen Winkel $\delta$ miteinander bilden, und diese Räder folglich Kegelräder sind. Wir wollen mit Q wieder den im Berührungspunkte stattfindenden Normaldruck bezeichnen, so ist derselbe nahezu auf der Ebene der Drehungsaxen senkrecht, und $r$, $r'$ seien wieder die Entfernungen des Berührungspunktes von diesen Axen. Ferner seien $\vartheta$, $\vartheta'$ die sehr kleinen Winkel, um welche sich die beiden Räder in einem beliebigen Augenblicke der Dauer der Berührung zweier Zähne von dem Augenblicke an, wo der Berührungspunkt in die Ebene der Axen tritt, gedrehet haben. Da die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten der Berührungspunkte vermöge der Bedingung der Berührung selbst gleich sein müssen, so hängt die Geschwindigkeit des Gleitens oder die relative Geschwindigkeit nur von den Tangentialkomponenten der wirklichen Geschwindigkeiten ab. Wenn man ferner zwei gleichzeitige Geschwindigkeiten $v$, $v'$ betrachtet, welche durch die geraden Linien AB, AC (Fig. 12) dargestellt werden, so wird die resultirende Geschwindigkeit durch die dritte Seite AD des Dreieckes ABD ausgedrückt, welches man erhält, wenn man die beiden geraden Linien, welche die Geschwindigkeiten darstellen, mit ihren Endpunkten in ihren ursprünglichen Richtungen aneinander legt. Aber für die relative Geschwindigkeit, d. h. für die Resultante aus zwei Geschwindigkeiten AB und BE = AC, wovon die letztere eine der frühern entgegengesetzte Richtung hat, ist die dritte Seite des Dreieckes ABE oder die dritte Seite BC des Dreieckes ABC, welches von den beiden von demselben Punkte A ausgehenden gegebenen Geschwindigkeiten gebildet wird, der geometrische Ausdruck. Die absoluten Geschwindigkeiten in dem Berührungspunkte sind für einen beliebigen Augenblick:

$$r\frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und} \quad r'\frac{d\vartheta'}{dt},$$

und wenn man sie auf die Berührungsebene, welche sehr wenig von der Ebene der Rotationsaxe verschieden ist, projicirt; so hat man:

$$r\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta, \quad \text{und} \quad r'\frac{d\vartheta'}{dt}\sin\vartheta'$$

oder nahezu:

$$\frac{r\vartheta d\vartheta}{dt}, \quad \text{und} \quad \frac{r\vartheta' d\vartheta'}{dt}.$$

Der Winkel, welchen diese Tangentialkomponenten mit einander bilden, ist ferner dem Winkel $\delta$ gleich, welchen die Ebenen der beiden Räder mit einander bilden und die Geschwindigkeit des Gleitens, welche durch die dritte Seite des aus diesen beiden Komponenten konstruirten Dreieckes ausgedrückt wird, ist folglich:

$$\frac{1}{dt}\sqrt{r^2\vartheta^2 d\vartheta^2 + r'^2\vartheta'^2 d\vartheta'^2 - 2rr'\vartheta\vartheta' d\vartheta d\vartheta'.\cos\delta}.$$

Aber die absoluten Geschwindigkeiten sind sehr wenig von den Normalgeschwindigkeiten verschieden, weil die Berührungsebene sehr wenig von der Ebene der Drehungsaxe verschieden ist, und da die Normalgeschwindigkeiten einander gleich sein müssen, wenn die Berührung der Zähne statt finden soll; so müssen auch die wirklichen Geschwindigkeiten nahezu einander gleich sein. Man kann daher setzen:

$$r\frac{d\vartheta}{dt} = r'\frac{d\vartheta'}{dt},$$

und der vorhergehende Ausdruck verwandelt sich mithin in folgenden:

$$\frac{rd\vartheta}{dt}\sqrt{\vartheta^2 + \vartheta'^2 - 2\vartheta\vartheta'\cos\delta}.$$

Wenn $n$, $n'$ die Anzahlen der Zähne der beiden Räder bezeichnen, so hat man:

$$n'\vartheta' = n\vartheta, \quad \text{folglich} \quad \vartheta' = \frac{n\vartheta}{n'}.$$

Die Geschwindigkeit des Gleitens wird folglich ausgedrückt durch:

$$\frac{rn\vartheta d\vartheta}{dt}\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2\cos\delta}{nn'}}.$$

Das der Reibung entsprechende Arbeitselement wird erhalten, wenn man diese Geschwindigkeit mit $fQdt$ multiplicirt, wo $f$ wieder das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke Q bezeichnet, und folglich wird dieses Arbeitselement ausgedrückt durch:

$$fQrn\vartheta d\vartheta \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n'^2}-\frac{2\cos\delta}{nn'}},$$

Da der Druck Q während der Dauer der Berührung zweier Zähne als konstant betrachtet werden kann, so integrirt man den vorhergehenden Ausdruck in dieser Voraussetzung. Die zwischen den beiden Zähnen von dem Augenblicke an, wo ihre Berührung in der Ebene der Drehungsaxen statt findet, bis zu dem Augenblicke, wo das erste Rad den Winkel $\vartheta_1$ beschrieben hat, statt findende Reibung konsumirt also eine Quantität Arbeit, welche ausgedrückt wird durch:

$$\frac{1}{2}fQrn\vartheta_1{}^2\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n'^2}-\frac{2\cos\delta}{nn'}}.$$

Die dem Normaldrucke Q während derselben Zeit entsprechende Quantität Arbeit ist gleich $Qr\vartheta_1$, und wenn man sie mit T bezeichnet, so wird die von der Reibung konsumirte Quantität Arbeit ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{2}fn\vartheta_1 T\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n'^2}-\frac{2\cos\delta}{nn'}}$$

Aber wenn man in dem Augenblicke, wo die Berührung zwischen den beiden betrachteten Zähnen aufhört, zwei andere Zähne in der Ebene der Axen sich zu berühren anfangen, wie die beiden ersten, so ist $n\vartheta_1 = 2\pi$, und die der Reibung entsprechende Arbeit wird folglich ausgedrückt durch:

$$\pi fT\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n'^2}-\frac{2\cos\delta}{nn'}}.$$

Da derselbe Ausdruck auf alle successiven Paare von Zähnen anwendbar ist, so braucht man, um die der Reibung entsprechende Arbeit für eine gegebene Dauer der Bewegung zu erhalten, nur T als die dem Drucke Q für dieselbe Dauer entsprechende Arbeit zu betrachten, und da diese Arbeit T wenig von der auf das Rad übertragenen Arbeit verschieden ist; so kann man die eine für die andere nehmen, d. h. die Zapfenreibung unberücksichtigt lassen.

Es kann geschehen, daß die Berührung der Zähne unter der Ebene der Drehungsaxen anfängt. Wenn man alsdann für dieses Gleiten denselben Koefficienten $f$ nimmt, und mit $\vartheta_2$ den Winkel bezeichnet, welchen die durch den Berührungspunkt gehende Meridianebene von dem Anfange der Berührung an bis zu dem Augenblicke beschreibt, wo der Berührungspunkt in die Ebene der Drehungsaxen fällt; so hat man für die der Reibung der beiden Zähne an einander entsprechende Arbeit den Ausdruck:

$$\frac{1}{2} n f Q r (\vartheta_1{}^2 + \vartheta_2{}^2) \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2\cos\delta}{nn'}}.$$

Wir wollen der Kürze wegen $\vartheta_2 = \alpha\vartheta_1$ setzen, so ist:

$$n\vartheta_1 (1+\alpha) = 2\pi,$$
$$T = Qr\vartheta_1 (1+\alpha),$$
$$\vartheta_1{}^2 + \vartheta_2{}^2 = \vartheta_1{}^2 (1+\alpha^2),$$

folglich:

$$nQr\vartheta_1{}^2 (1+\alpha)^2 = 2\pi T,$$

und wenn man diese Relationen anwendet; so erhält man für die der Reibung entsprechende Arbeit den Ausdruck:

$$\frac{f\pi T\,(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^2} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2\cos\delta}{nn'}},$$

welcher für $\alpha = 1$ oder $\vartheta_2 = \vartheta_1$, d. h. wenn die Berührung der Zähne in gleichen Winkelabständen unter und über der Ebene der Drehungsaxe anfängt und aufhört, ein Minimum wird, und ist alsdann nur halb so groß, als wenn die Berührung der Zähne ganz auf derselben Seite der Ebene der Drehungsaxen statt findet.

Wenn die Räder in derselben Ebene, aber außerhalb einander liegen, wie dieses gewöhnlich der Fall ist; so ist $\delta = 180^0$, also $\cos\delta = -1$ und der vorhergehende Ausdruck reducirt sich alsdann in dem Falle des Maximums, d. h. für $\alpha = 0$ oder für $\alpha = \infty$ auf:

$$f\pi T\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

Dieser letzte Ausdruck für den von der Reibung der Verzahnungen herrührenden Verlust an Arbeit wird gewöhnlich angewandt und rührt von Poncelet her.

Wenn das eine Rad innerhalb des andern liegt, so ist $\delta = 0$, folglich $\cos\delta = 1$ und der Ausdruck für die durch die Reibung verlorne Quantität Arbeit geht alsdann in folgende über:

$$f\pi T\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right),$$

dessen Werth offenbar viel kleiner ist, als wenn das eine Rad außerhalb des andern liegt.

Wenn die Verzahnungen neu sind, so berührt sich immer nur ein Paar von Zähnen, obgleich die Verzahnungen so eingerichtet sind, daß sich zugleich mehrere Paare von Zähnen berühren müßten. In diesem Falle bezeichnen $n$, $n'$ in den vorhergehenden Formeln nicht mehr die Anzahlen der Zähne der Räder, sondern blos die Anzahlen von Zähnen, welche sich während einer Umdrehung berühren. Wenn z. B. die Berührungen immer nur um den zweiten Zahn statt finden, so werden die von der Reibung herrührenden Verluste an Arbeit verdoppelt, weil sie im umgekehrten Verhältnisse der Zahlen $n$ und $n'$ stehen, und dieser Zustand der Verzahnung dauert so lange fort, bis die einander berührenden Zähne durch die Reibung so weit abgenutzt sind, daß die übrigen einander auch erreichen und auf einander wirken. Es ist also der von den Reibungen herrührende Verlust an Arbeit bei den schon einige Zeit gebrauchten Räderwerken nicht blos deshalb geringer, weil sich die Zähne an einander abgeschliffen oder polirt haben, sondern weil alsdann der Eingriff erst ein regelmäßiger wird.

## Berechnung der Reibung für die schiefe Ebene und den Keil.

§. 63. Auf einer schiefen Ebene (Fig. 13) liege ein Keil, oder ein beliebiger anderer Körper, welcher vermöge eines Gewichtes **P** sich längs dieser Ebene herabzubewegen strebt, während eine horizontale Kraft **R** denselben aufwärts zu bewegen sucht. Wenn man die Normalkomponente der Summe der Widerstände, welche die schiefe Ebene auf den Keil ausübt mit **N** und das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke mit $f$ bezeichnet; so ist $f$**N** der Ausdruck der Reibung, und für das Gleichgewicht des Keiles muß man zwischen den vertikalen Komponenten der verschiedenen Kräfte die Relation:

$$\mathbf{P} + f\mathbf{N}\sin\alpha - \mathbf{N}\cos\alpha = 0,$$

und zwischen den horizontalen Komponenten die Relation:

$$\mathbf{R} - f\mathbf{N}\cos\alpha - \mathbf{N}\sin\alpha = 0$$

haben, woraus folgt, wenn man **N** eliminirt:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{P}(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = \frac{\mathbf{P}(\operatorname{tang}\alpha + f)}{1 - f\operatorname{tang}\alpha}.$$

Wenn die Kraft **R** den Keil blos im Gleichgewichte halten soll, so verwandelt sich das Zeichen der Komponente $fN$ in das entgegengesetzte, und man erhält:

$$R = \frac{P(\tan\alpha - f)}{1 + f\tan\alpha}.$$

Wenn man $f = \tan\varphi$ setzt, so lassen sich die beiden vorhergehenden Formeln auf folgende Form bringen:

$$R = P\tan(\alpha \pm \varphi),$$

wo sich das obere und untere Zeichen resp. auf den Fall bezieht, wo $R$ eine Bewegungs- oder Widerstandskraft ist. Wenn man den Werth von $R$ im ersten und zweiten Falle resp. mit $R$ und $R'$ bezeichnet, so sucht eine der beiden Kräfte $R$, $R'$ den Keil aufwärts zu bewegen, während die andern blos sein Herabgleiten zu verhindern strebt, und man hat zwischen diesen beiden Kräften die Relation:

$$R' = R.\frac{\tan(\alpha - \varphi)}{\tan(\alpha + \varphi)}.$$

Wenn $\alpha < \varphi$ ist, so ist der Werth von $R'$ negativ, d. h. in diesem Falle muß man auf den Keil eine Kraft ausüben, wenn er sich abwärts bewegen soll.

Es sei $BAD = \varphi$ (Fig. 14) und $DAC = DAC' = \alpha$, so verhalten sich, wenn man $MN$ senkrecht auf $AB$ zieht, die Längen $MN$, $MN'$ wie die Kräfte $R$, $R'$.

Wenn sich über dem Keile ein Körper befindet, welcher auf denselben eine Wirkung ausübt, aber sich nicht mit fortbewegt, wie ein zusammen zu drückender Körper; so findet auf der obern Fläche $AB$ (Fig. 15) des Keiles eine Reibung statt. Bezeichnet $P$ die Kraft, mit welcher der zusammen zu drückende Körper in normaler Richtung gegen die Fläche $AB$ wirkt; so drückt $f'P$ die auf dieser Fläche stattfindende Reibung aus, und wenn man die frühern Bezeichnungen beibehält; so findet man auf dieselbe Weise, wie vorhin:

$$R = \frac{P[\sin\alpha + (f+f')\cos\alpha - ff'\sin\alpha]}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$$

$$= \frac{P[(1 - ff')\tan\alpha + f + f']}{1 - f\tan\alpha}.$$

Diese Formel läßt sich auf den Fall anwenden, wo die Kraft $R$ zu einer der beiden Seitenflächen des Keiles parallel ist, und für den Druck $P$, welchen eine zu $AB$ parallele Kraft $R$ auf den zusammen zu drückenden Körper ausübt, ergibt sich daraus:

$$P = \frac{R(1 - f \operatorname{tang} \alpha)}{(1 - ff') \operatorname{tang} \alpha + f + f'}.$$

Wenn die Kraft den Keil nur in seiner Lage zu erhalten suchte, so würde das Zeichen der Reibung geändert, und man hätte:

$$R' = \frac{P\,[(1 - ff') \operatorname{tang} \alpha - f - f']}{1 + f \operatorname{tang} \alpha}.$$

Diese Kraft wird negativ, wenn $\alpha < \varphi + \varphi'$ ist, wo $\varphi'$ den Winkel bezeichnet, dessen trigonometrische Tangente $f'$ ist, d. h. man muß diese Kraft in einer der ursprünglichen entgegengesetzten Richtung anbringen, um den Keil hinwegnehmen zu können. Zwischen den Kräften R und R' findet die Relation statt:

$$R' = R. \frac{1 - f \operatorname{tang} \alpha}{1 + f \operatorname{tang} \alpha} \cdot \frac{(1 - ff') \operatorname{tang} \alpha - f - f'}{(1 - ff') \operatorname{tang} \alpha + f + f'}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Richtung der Kraft R den von den beiden Seitenflächen des Keiles gebildeten Winkel in zwei gleiche Theile theilt, so ergibt sich leicht, wenn $2\beta$ diesen Winkel und P den auf jede der beiden Seitenflächen des Keiles ausgeübten Normaldruck bezeichnet:

$$R = 2P(\sin \beta + f \cos \beta),$$

und folglich ist der Druck P, welchen jede Seitenfläche des Keiles auf die äußern Hindernisse ausübt, wenn die Kraft R nach der Richtung der erwähnten Halbirungslinie wirkt:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sin \beta + f \cos \beta}.$$

Wenn man den Keil blos in seiner Lage erhalten will, so ergibt sich die dazu erforderliche Kraft R', wenn man das Zeichen von $f$ in das entgegengesetzte verwandelt:

$$R' = 2P(\sin \beta - f \cos \beta).$$

Diese Kraft ist negativ, wenn $\beta < \varphi$ ist und alsdann wird die Kraft, welche erforderlich ist, um den Keil hinwegnehmen zu können, ausgedrückt durch:

$$-2P(\sin \beta - f \cos \beta).$$

Zwischen den Kräften R und R' hat man die Relation:

$$R' = R . \frac{\sin\beta - f\cos\beta}{\sin\beta + f\cos\beta} = R . \frac{\operatorname{tang}\beta - f}{\operatorname{tang}\beta + f} .$$

Diese Rechnungen sind auch auf den Fall anwendbar, wo ein massiver Kegel vermittelst eines Hebels in einen hohlen Kegel gedrückt wird, welcher sich um seine Axe drehet, wie bei Ein- und Ausrückungen. Es sei $\Pi$ das Gewicht des massiven Kegels, $\beta$ der Winkel, welchen die Erzeugungslinie der Kegelfläche mit ihrer Axe bildet, **R** die vermittelst des Hebels auf den Kopf des massiven Kegels ausgeübte Kraft, $f'$ der Koefficient der Reibung des massiven Kegels auf seiner Axe und $f$ der Koefficient der Reibung zwischen beiden Kegeln; so ist die auf den Kopf des Kegels wirklich ausgeübte Kraft:

$$R - f'\Pi .$$

Die Summe der von dem massiven auf den hohlen Kegel ausgeübten Normaldruckkräfte, welche hier dieselbe Rolle spielt, wie **2P** in der vorhergehenden Theorie, wird nach dem Obigen ausgedrückt durch:

$$\frac{R - f'\Pi}{\sin\beta + f\cos\beta} ,$$

und folglich die gegenseitige Reibung der beiden Kegel:

$$\frac{f(R - f'\Pi)}{\sin\beta + f\cos\beta} .$$

Wenn der Winkel $\beta$ sehr klein ist, so reducirt sich dieser Werth nahezu auf:

$$R - f'\Pi .$$

Wenn **P** die Summe der Normaldruckkräfte bezeichnet, so hat man nach dem eben Gesagten:

$$P = \frac{R - f'\Pi}{\sin\beta + f\cos\beta} ,$$

folglich:

$$R = f'\Pi + P(\sin\beta + f\cos\beta) .$$

Wenn man die Kraft **R'** haben will, welche erfordert wird, um den massiven Kegel zurückzuziehen, so muß man in dieser letzten Formel zugleich die Zeichen von **R**, $f'$ und $f$ verändern, wodurch man erhält:

$$R' = f'\Pi + P(f\cos\beta - \sin\beta),$$

und folglich wenn man P eliminirt:

$$R' = f'\Pi + (R - f'\Pi) \cdot \frac{f\cos\beta - \sin\beta}{f\cos\beta + \sin\beta}.$$

Da man in den gewöhnlichen Fällen, den massiven Kegel während der Rotationsbewegung des hohlen Kegels in letztern schiebt, und die Geschwindigkeit des hohlen Kegels weit größer ist, als die des massiven; so folgt, daß die gegenseitige Reibung der beiden Kegel in einer nahezu auf der Richtung der Kraft $R - f'\Pi$ senkrechten Ebene statt findet, und folglich der Komponente $P\sin\beta$ des Normaldruckes nicht mehr zu Hülfe kommt, so daß man alsdann das Glied $f\cos\beta$ in dem Nenner des Ausdruckes von P hinweglassen kann, wodurch man nahezu erhält:

$$P = \frac{R - f'\Pi}{\sin\beta}$$

und:

$$fP = \frac{f(R - f'\Pi)}{\sin\beta}.$$

Gewöhnlich macht man wenigstens $\sin\beta = \frac{1}{20}$, und wenn man für gewöhnliche Fälle $f = 0{,}28$ nimmt; so erhält man für die Reibung der beiden Kegel an einander:

$$fP = 5{,}60(R - f'\Pi).$$

Wenn man den massiven Kegel aus dem hohlen zurückzieht, so wirkt die Reibung nach der Längenrichtung, und man hat wie weiter oben:

$$R' = f'\Pi + P(f\cos\beta - \sin\beta),$$

oder, wenn man für P seinen jetzigen Werth $\frac{R - f'\Pi}{\sin\beta}$ setzt:

$$R' = f'\Pi + (R - f'\Pi)\left(\frac{f}{\tang\beta} - 1\right).$$

## Reibung der dreikantigen Schraube.

§. 64. Die Reibung in dem Gewinde der dreikantigen Schraube ließe sich näherungsweise mit Hülfe einer gewissen Analogie mit einem zwischen zwei geneigten Ebenen befindlichen Keile berechnen; allein es ist genauer, die Rechnung direkt anzustellen.

Wir wollen die Fläche des Schraubenganges oder Gewindes auf eine einzige mittlere Schraubenlinie reducirt annehmen, die Schraubenaxe sei vertikal, und wir wollen annehmen, daß auf das System die folgenden drei Kräfte wirken: 1) zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte **R**, welche an den Enden eines horizontalen Hebels wirken und die Schraube drehend zu heben suchen; 2) eine Kraft **P**, welche in vertikaler Richtung von oben nach unten auf den Kopf der Schraube wirkt und den Widerstand bildet, und 3) die Druckkräfte, welche die Schraubenmutter in normaler Richtung auf die Fläche des Schraubengewindes ausübt, so wie die Reibungen auf dieser Fläche, welche nach tangentialen Richtungen an der mittlern Schraubenlinie wirken. Wir wollen mit **Q** die Summe der Normaldruckkräfte auf das Schraubengewinde bezeichnen, so ist $f\mathbf{Q}$ die Summe der Tangentialreibungen, welche, wie wir sogleich sehen werden, hier in Betracht gezogen werden müssen, obgleich sie nach verschiedenen Richtungen wirken, weil sie mit der Axe der Schraube alle dieselben Winkel bilden, und worauf sie projicirt werden müssen, oder nach welcher man ihre Komponente nehmen muß. Es bezeichne $\alpha$ den Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen die Horizontalebene und $\beta$ den Winkel, welchen die Erzeugungslinie der Schraubenfläche mit derselben Ebene bildet. Der auf die Schraubenfläche ausgeübte Druck wirkt nach der Richtung der Normale, d. h. nach der Richtung einer geraden Linie, welche zugleich auf der Schraubenlinie und auf der Erzeugungslinie der Schraubenfläche senkrecht ist. Um den Winkel kennen zu lernen, welchen diese Normale mit der vertikalen Axe der Schraube bildet, wollen wir sie auf drei rechtwinklige Axen beziehen, wovon die eine, nämlich die Axe der $z$ mit der Axe der Schraube zusammenfällt, während die Axe der $x$ durch den Punkt der Schraubenfläche geht, worin die betrachtete Normale errichtet ist. Die Kosinus der Winkel, welche die Erzeugungslinie der Schraubenfläche mit den Koordinatenaxen der $x$, $y$, $z$ bildet, sind alsdann:

$$\cos\beta = a, \quad 0 = b, \quad \sin\beta = c$$

und die Kosinus der Winkel, welche dieselben Axen mit der Tangente an der Schraubenlinie in diesem in der Ebene der $zx$ liegenden Punkte bilden, sind:

$$0 = a', \ \cos\alpha = b', \ \sin\alpha = c'.$$

Wenn aber eine gerade Linie auf zwei anderen zugleich senkrecht ist, welche mit den Koordinatenaxen Winkel bilden, deren Kosinus $a$, $b$, $c$ und $a'$, $b'$, $c'$ sind; so bildet sie mit denselben Axen Winkel, deren Kosinus resp. ausgedrückt werden durch:

$$\frac{bc'-cb'}{\sqrt{(ab'-ba')^2+(ca'-ac')^2+(bc'-cb')^2}},$$
$$\frac{ca'-ac'}{\sqrt{(ab'-ba')^2+(ca'-ac')^2+(bc'-cb')^2}},$$
$$\frac{ab'-ba'}{\sqrt{(ab'-ba')^2+(ca'-ac')^2+(bc'-cb')^2}}.$$

Die Normale bildet also mit der Axe der $y$ einen Winkel, dessen Kosinus durch:

$$\frac{\cos\beta\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta\sin^2\alpha}}, \text{ oder } \frac{\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}},$$

und mit der Axe der $z$ einen Winkel, dessen Kosinus durch:

$$\frac{\cos\beta}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}$$

ausgedrückt wird. Die Reibung auf der Schraubenfläche, welche nach der Richtung der Tangente an der Schraubenlinie wirkt, bildet mit der Axe der Schraube oder mit der Axe der $z$ einen Winkel, dessen Kosinus $= \sin\alpha$ ist.

Zum Gleichgewichte sämmtlicher auf die Schraube wirkender Kräfte wird unter andern Bedingungen auch die erfordert, daß die Summe der Komponenten nach der Vertikale Null sei, welches gibt:

$$P=\frac{Q\cos\beta}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}-fQ\sin\alpha. \qquad (1)$$

Wir wollen nun die Momente in Beziehung auf die Axe der $z$ nehmen. Wenn $x$, $y$, $z$ die Koordinaten eines Punktes sind, auf welchen eine Kraft $F$ wirkt, die mit den Koordinatenaxen die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bildet; so ist das Moment dieser Kraft in Beziehung auf die Axe der $z$:

$$F(x\cos\mu-y\cos\lambda)$$

und für den Normaldruck $Q$ hat man:

$$\cos\mu=\frac{\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}.$$

Wenn der Angriffspunkt der Kraft $Q$ auf der Axe der $x$ in der Entfernung $r$ vom Anfangspunkte liegt, so ist $y=0$, $x=r$ und das Moment von $Q$ ist folglich:

$$\frac{Qr\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}.$$

Wenn man annimmt, daß die an jedem Ende des Hebels wirkende Kraft R auch um die Länge $r$ von der Axe der Schraube entfernt ist, so ist die Gleichung der Momente, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $r$ hinwegläßt:

$$2R = Q\frac{\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}} + fQ\cos\alpha. \qquad (2)$$

Eliminirt man Q zwischen den Gleichungen (1) und (2), so findet man:

$$2R = P\frac{\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha + f\cos\alpha\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}{\cos\beta - f\sin\alpha\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}. \qquad (3)$$

Dieses ist die Relation zwischen der auf den Kopf der Schraube wirkenden Kraft P und der an jedem Ende des Drehungshebels der Schraube wirkenden Kraft R, wo diese Kraft R auf die der mittlern Schraubenlinie, worauf die Reibung wirkend angenommen werden kann, entsprechende Entfernung von der Axe der Schraube bezogen ist. Diese Formel gibt die für die Schraube mit vierkantigem Gewinde oder für den Keil auf der schiefen Ebene wieder (§. 63), wenn man darin $\beta = 0$ setzt; denn alsdann hat man:

$$2R = P\frac{\mathrm{tang}\,\alpha + f}{1 - f\,\mathrm{tang}\,\alpha}.$$

Wenn die Reibung Null wäre, so hätte der Winkel $\beta$ auf die Kraft R keinen Einfluß mehr; denn setzt man in der allgemeinen Formel $f=0$, so findet man:

$$2R = P\,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

Wenn der Winkel $\beta$ sehr groß wird, so wird die Kraft R ebenfalls sehr beträchtlich, weil der Nenner ihres Ausdruckes sehr klein wird, und die Werthe von $\beta$, $\alpha$, $f$ können so beschaffen sein, daß R unendlich groß wird, d. h. daß die Schraube nicht bewegt werden kann, wie groß die Bewegungskraft R auch sein mag.

Wenn man durch die Bewegung der Schraube vermittelst der Kräfte R nicht mehr den Widerstand P überwinden will, sondern wenn man diese Kräfte R in entgegengesetztem Sinne wirken läßt, um die Schraube in der Richtung der Kraft P niederwärts zu bewegen; so sind R, P Bewegungskräfte und nur die Reibung ist eine Widerstandskraft. In diesem Falle muß man in den vorhergehenden Formeln das Zeichen von $f$ und $\mathbf{R}$ verändern, und wenn man alsdann die Zeichen beider Theile der Gleichung in die entgegengesetzten verwandelt; so erhält man:

$$2R = P.\frac{f\cos\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha\cos^2\beta}-\cos\beta\tan\alpha}{\cos\beta+f\sin\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha\cos^2\beta}}.$$

Wenn der Winkel $\beta$ sehr klein ist, so kann man $\cos\beta = 1$ und:

$$\sqrt{1+\tan^2\alpha\cos^2\beta} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

nehmen, wodurch man die bekannte Formel:

$$2R = P.\ \frac{f-\tan\alpha}{1+f\tan\alpha},$$

für die vierkantige Schraube erhält.

Wenn dagegen der Winkel $\beta$ sehr groß ist, so wird $\cos.\beta$ sehr klein, und wenn man $\cos\beta\tan\alpha$ gegen $f\cos\alpha$ vernachlässigen kann; so erhält man:

$$2R = P\frac{f\cos\alpha}{\cos\beta+f\sin\alpha},$$

und man sieht, daß in diesem Falle die Kraft $\mathbf{R}$ mit $f$ zunimmt.

## Berechnung der Reibung in der Schraube ohne Ende.

§. 65. In der Schraube ohne Ende beschreiben die Punkte der Schraube und des Zahnes des Rades, welche einander berühren, Kreise, die in auf einander senkrechten Ebenen liegen, und die Winkelgeschwindigkeiten müssen so beschaffen sein, daß die nach der gemeinschaftlichen Normale auf den einander berührenden Flächen zerlegten wirklichen Geschwindigkeiten einander gleich sind. Die eine Berührungsfläche ist die des Schraubengewindes und die Normale derselben bildet mit der Axe der Schraube einen Winkel $\alpha$, dessen Tangente $= \frac{h}{2\pi r}$ ist, wo $h$ die Höhe des Schraubenganges oder die Schraubenweite und $r$ den von der Axe der Schraube nach dem Berührungspunkte gehenden Radius bezeichnet. Wenn $\omega$ die Rotationsgeschwindigkeit der Schraube bezeichnet, so ist $r\omega$ die wirkliche Geschwindigkeit des der Schraube angehörenden Berührungs- oder Reibungspunktes und die wirkliche Geschwindigkeit des Berührungspunktes des Rades ist $= r'\omega'$, wo $r'$ den nach dem Berührungspunkte gehenden Radius und $\omega'$

die Winkelgeschwindigkeit des Rades bezeichnet. Da die Komponenten dieser beiden Geschwindigkeiten nach der Normale der Schraubenfläche einander gleich sein müssen, so hat man:

$$r\omega \sin\alpha = r'\omega' \cos\alpha$$

und die Geschwindigkeit des Gleitens, welche die Resultante aus den auf einander senkrechten Geschwindigkeiten $r\omega$, und $r'\omega'$ sein muß, ist folglich gleich:

$$r\omega \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha},$$

oder:

$$\frac{r\omega}{\cos\alpha}.$$

Wenn **P** den Normaldruck in dem Berührungspunkte bezeichnet, so ist die Reibung $= f\mathrm{P}$, und wenn **R** die in der Entfernung des mittlern Schraubenfadens von der Axe der Schraube auf diese wirkende Kraft bezeichnet; so hat man die bekannte Relation:

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}\sin\alpha + f\mathrm{P}\cos\alpha,$$

folglich:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{R}}{\sin\alpha + f\cos\alpha}.$$

Die durch die Reibung konsumirte Quantität Arbeit wird durch das Integral:

$$\int \frac{f\,\mathrm{P}r\omega dt}{\cos\alpha},$$

oder:

$$\int \frac{f\mathrm{R}r\omega dt}{\cos\alpha(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

ausgedrückt. Wenn **T** die in einer gewissen Zeit auf die Schraube übertragene Arbeit bezeichnet, so hat man:

$$\mathrm{T} = \int \mathrm{R}r\omega dt,$$

und wenn $\mathrm{T}_f$ die durch die Reibung konsumirte Quantität Arbeit bezeichnet, so hat man:

$$T_f = \frac{fT}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha + f\cos^2\alpha},$$

woraus man sieht, daß der Arbeitsverlust nahezu $= T$ ist, wenn der Winkel $\alpha$ sehr klein wird, so daß von der auf die Schraube übertragenen Arbeit nur eine sehr geringe Quantität auf das Rad übertragen und der größte Theil durch die Reibung konsumirt wird.

Bei der Ableitung dieser Formel haben wir angenommen, daß der Berührungspunkt eine solche Lage hat, daß die Geschwindigkeit des Rades nahezu zu der Axe der Schraube parallel ist; aber wenn sie dagegen etwas geneigt wäre, so erhielte man für die Geschwindigkeit des Gleitens in dem Sinne des Halbmessers des Rades ein Glied mehr, welche Komponente wir in den obigen Rechnungen unberücksichtigt gelassen haben.

Wir wollen nun annehmen, daß der Winkel, welchen die Geschwindigkeit des dem Rade angehörigen Berührungspunktes mit der Axe der Schraube bildet, in Rechnung gebracht werden soll. Es bezeichne $\vartheta'$ diesen Winkel, $r'$ den nach dem Berührungspunkte gehenden Radius, $\vartheta$ den zu gleicher Zeit von der Schraube beschriebenen Winkel und $r$ den nach dem Berührungspunkte der Schraube gehenden Radius; so haben wir, da die Normalgeschwindigkeiten auf der Schraubenfläche einander gleich sein müssen:

$$d\vartheta \,.\, r\sin\alpha = r'\, d\vartheta' \,.\, \cos\vartheta' \,.\, \cos\alpha. \qquad \text{(A)}$$

Die Geschwindigkeit des Gleitens ist aber:

$$= \sqrt{r^2 d\vartheta^2 + r'^2 d\vartheta'^2},$$

oder:

$$= r d\vartheta \sqrt{1 + \text{tang}^2\alpha \,.\, \frac{1}{\cos^2\vartheta'}}\,.$$

Ferner kann man $1 + \vartheta'^2$ für $\frac{1}{\cos^2\vartheta'}$ setzen, und alsdann hat man:

$$r d\vartheta \sqrt{1 + \text{tang}^2\alpha + \vartheta'^2\, \text{tang}^2\alpha}\,;$$

aber da:

$$1 + \text{tang}^2\alpha > 10\,\vartheta'^2\, \text{tang}^2\alpha$$

ist, so kann man hier die Poncelet'sche Transformation anwenden *) welche $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{20}$ bis auf $\frac{1}{1538}$ genau gibt, wodurch man erhält:

$$r d\vartheta . \left[\sqrt{1+\tang^2\alpha}\left(1 + \frac{\vartheta' \tang\alpha}{20\sqrt{1+\tang^2\alpha}}\right)\right],$$

oder wenn man den Bruch $\frac{1}{20}$ allgemein mit $\beta$ bezeichnet:

$$\frac{r d\vartheta}{\cos\alpha}(1+\beta\vartheta' \sin\alpha).$$

Integrirt man die Gleichung (A), so erhält man:

$$r\vartheta \sin\alpha = r' \sin\vartheta \cos\alpha\,, \text{ oder } r\vartheta \tang\alpha = r'\vartheta',$$

folglich:

$$\vartheta' = \frac{r\vartheta}{r'} \tang\alpha\,,$$

und wenn man diesen Werth in den Ausdruck der Geschwindigkeit des Gleitens substituirt, so hat man:

$$\frac{r d\vartheta}{\cos\alpha} + \beta r d\vartheta \frac{r\vartheta}{r'} \tang^2\alpha.$$

Hiernach findet man, wenn man den Ausdruck für das Arbeitselement integrirt:

$$\frac{f\mathrm{R}}{(\sin\alpha + f\cos\alpha)} \cdot \frac{r\vartheta}{\cos\alpha} + \beta \frac{f\,\mathrm{R}}{(\sin\alpha + f\cos\alpha)} \cdot \frac{r^2\vartheta^2}{2r'} \tang^2\alpha,$$

und da:

$$\mathrm{R}r\vartheta = \mathrm{T}\,,\quad \frac{\vartheta r}{r'} = \vartheta',\quad \vartheta = \frac{2\pi}{n}$$

ist, wo $n$ die Anzahl der Zähne des Rades bezeichnet, so erhält man endlich für den Ausdruck der verlorenen Quantität Arbeit:

$$\frac{f\,\mathrm{T}}{\cos\alpha(\sin\alpha + f\cos\alpha)} + \beta \frac{f\,\mathrm{T}}{\sin\alpha + f\cos\alpha} \tang\alpha . \frac{\pi}{n}\,.$$

---

*) Poncelet's Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen. Bd. 1. Seite 283 bis 296.

## Steifigkeit der Seile.

§. 66. Man hat gefunden, daß eine gewisse Arbeit erforderlich ist, um ein Seil um eine Welle zu legen oder überhaupt in eine krumme Linie zu biegen, während die Arbeit, welche zum Abwickeln oder Geradmachen des Seiles erfordert wird, unmerklich ist.

Um eine Länge von 1 Meter von einem Seile von dem Durchmesser $d$ auf eine Welle oder Rolle von dem Halbmesser $\mathbf{R}$ zu wickeln, wird eine Quantität Arbeit erfordert, welche der Größe:

$$\frac{d^{\mu}}{\mathrm{R}}(a+b\mathrm{P})$$

proportional ist, wo $\mathbf{P}$ die Zugkraft bezeichnet, welche auf der Seite des Aufwickelns oder Auflegens des Seiles an demselben wirkt; d. h. es muß auf dieser Seite unabhängig von andern Umständen eine Zugkraft an dem Seile wirken, welche ausgedrückt wird durch:

$$\mathrm{P}+\frac{d^{\mu}}{\mathrm{R}}(a+b\mathrm{P}),$$

wo die Koefficienten $a$, $b$ durch Beobachtungen bestimmt werden müssen. Man hat diese Formeln bis zu Spannungen von 500 Kilogrammen verificirt. Für noch etwas neue Seile ist der Exponent $\mu=1{,}80$ und für alte Seile $=1{,}40$. Man kann denselben gewöhnlich $=1{,}70$ nehmen, und für ein Seil von $0^{\mathrm{m}}{,}02$ im Durchmesser hat man:

$$ad^{1{,}70}=0{,}1112\,,\quad bd^{1{,}70}=0{,}00487.$$

Für ein getheertes Seil von 30 Litzen und $0^{\mathrm{m}}{,}023$ im Durchmesser ist:

$$ad^{\mu}=0{,}1748\,,\quad bd^{\mu}=0{,}00627.$$

Für getheerte Seile berechnet man die Koefficienten $ad^{\mu}$, $bd^{\mu}$ nicht nach dem Durchmesser, sondern nach diesen letzten Zahlen und nach Verhältniß der Anzahl der Litzen, woraus das Seil besteht.

Es ist eine Ruhezeit von 5 bis 6 Minuten erforderlich, damit das Seil denselben Widerstand hervorbringt für die Biegung und keinen größern Widerstand für eine Biegung in entgegengesetztem Sinne annimmt, wie dieses häufig geschieht.

Wenn über eine Rolle oder Welle von dem Halbmesser $\mathbf{R}$ mit Zapfen von dem Halbmesser $r$ ein Seil gelegt ist, woran eine

Bewegungskraft **P** und eine Widerstandskraft $\mathbf{P}_1$ wirken, so hat man, wenn $f$ den Koefficienten der Zapfenreibung bezeichnet:

$$\mathrm{PR} = \mathrm{P}_1\mathrm{R} + (\mathrm{P}+\mathrm{P}_1)\frac{fr}{\sqrt{1+f^2}} + (a+b\mathrm{P}_1)d^\mu,$$

woraus folgt, wenn man $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f'$ setzt:

$$\mathrm{P}_1 = \frac{\mathrm{P}\left(1-f'\frac{r}{\mathrm{R}}\right) - \frac{ad^\mu}{\mathrm{R}}}{1+f'\frac{r}{\mathrm{R}} + \frac{bd^\mu}{\mathrm{R}}}.$$

Wenn also **T** die auf der einen Seite des Seiles wirkende Bewegungsarbeit ist, und $h$ die Höhe bezeichnet, um welche sich jeder Punkt des Seiles auf dieser Seite niederwärts bewegt hat; so wird die an dem andern Ende des Seiles wirkende Widerstandsarbeit ausgedrückt durch:

$$\frac{\mathrm{T}\left(1-f'\frac{r}{\mathrm{R}}\right) - \frac{ad^\mu}{\mathrm{R}}h}{1+f'\frac{r}{\mathrm{R}} + \frac{bd^\mu}{\mathrm{R}}},$$

und der Verlust an Arbeit ist daher kleiner, je größer die Kraft **P** ist.

Ein Seil muß mit keinem größern Gewichte, als 40 Kilogr. für die Litze, oder ungefähr 3,000,000 $d^2$ Kilogr., oder 300 $d^2$ Kilogrammen, je nachdem der Durchmesser $d$ desselben in Metern oder in Centimetern ausgedrückt ist, belastet werden.

Wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\frac{1-f'\frac{r}{\mathrm{R}}}{1+f'\frac{r}{\mathrm{R}} + b\frac{d^\mu}{\mathrm{R}}} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\frac{ad^\mu}{\mathrm{R}}}{1+f'\frac{r}{\mathrm{R}} + b\frac{d^\mu}{\mathrm{R}}} = \beta,$$

so hat man:

$$\mathrm{P}_1 = \alpha\mathrm{P} - \beta.$$

Wenn man eine Reihe ähnlicher Rollen hätte, so findet man:

$$\mathrm{P}_2 = \alpha\mathrm{P}_1 - \beta,$$
$$\mathrm{P}_3 = \alpha\mathrm{P}_2 - \beta,$$
etc.,

und folglich:

$$\mathbf{P}_n = \alpha^n \mathbf{P} - \beta \left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right).$$

Die übertragene Arbeit kann also zuletzt Null werden, was statt finden würde, wenn man $\alpha^n \mathrm{P}\ (1-\alpha) = \beta\ (1-\alpha^n)$, folglich:

$$n = \frac{\log \left[\dfrac{1}{\mathrm{P}\,\dfrac{(1-\alpha)}{\beta} + 1}\right]}{\log \alpha}$$

hätte.

Wenn z. B. $\mathrm{R} = 0{,}10$, $r = 0{,}007$, $d = 0{,}02$, $f = 0{,}15$, folglich $f' = 0{,}14$ ist, so hat man nahezu:

$$\frac{ad^\mu}{\mathrm{R}} = 1{,}112, \quad \frac{bd^\mu}{\mathrm{R}} = 0{,}048,$$

und folglich:

$$\alpha = 0{,}93, \quad \beta = 1{,}05.$$

Also:

$$\mathbf{P}_1 = 0{,}93\,\mathbf{P} - 1^{\mathrm{k}},05,$$

und für 8 Rollen hätte man:

$$\mathbf{P}_8 = 0{,}595\,\mathbf{P} - 6^{\mathrm{k}},54.$$

Wenn $\mathrm{R} = 0{,}15$, $r = 0{,}01$, $d = 0{,}04$ und das Seil wieder ein ungetheertes ist; so braucht man die vorhergehenden Werthe von $\frac{ad^\mu}{\mathrm{R}}$, $\frac{bd^\mu}{\mathrm{R}}$ nur mit $2^{1 \cdot 80} \times \frac{10}{15} = 2{,}32$ nahezu zu multipliciren, wodurch man erhält:

$$\frac{ad^\mu}{\mathrm{R}} = 2{,}580, \quad \frac{bd^\mu}{\mathrm{R}} = 0{,}111,$$

$$f' \frac{r}{\mathrm{R}} = 0{,}0093,$$

folglich:

$$\alpha = 0{,}88 \text{ und } \beta = 2{,}30,$$

mithin:

$$P_1 = 0{,}88P - 2^k{,}30$$

und für 8 Rollen:

$$P_8 = 0{,}57P - 8^k{,}23.$$

Bei Flaschenzügen wäre die Widerstandskraft **Q** nicht $= nP$, sondern:

$$Q = P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_n,$$

und wenn man für $P_1$, $P_2$, etc. ihre Werthe setzt:

$$Q = P\alpha \frac{(1-\alpha^n)}{1-\alpha} - \frac{n\beta}{1-\alpha} + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} \cdot \frac{(1-\alpha^n)}{1-\alpha},$$

oder auch:

$$Q = \alpha \frac{(1-\alpha^n)}{1-\alpha} P - \frac{\beta}{1-\alpha} \cdot \left[n - \alpha \frac{(1-\alpha^n)}{(1-\alpha)}\right].$$

Für einen Flaschenzug von 8 Rollen, wie die in dem ersten vorhergehenden Beispiele hätte man:

$$Q = 5{,}80P - 35^k{,}57, \text{ statt } Q = 8P,$$

und für Rollen, wie die im zweiten Beispiele:

$$Q = 3{,}15P - 92^k{,}97, \text{ statt } Q = 8P.$$

Wenn man ein Seil zur Uebertragung der Bewegung einer Welle auf eine andere anwendet, so muß die Spannung auf der Seite, wo sie am kleinsten ist, den vierten Theil der durch die zu übertragende Arbeit bestimmten Kraft betragen. Wenn also $R'$, $R''$ die Halbmesser der beiden Räder, $\omega'$, $\omega''$ ihre Winkelgeschwindigkeiten und **T** die der ersten Welle mitgetheilte Quantität Arbeit bezeichnen; so wird der von der Steifigkeit des Seiles herrührende Verlust an Arbeit ausgedrückt durch:

$$\omega' R' . \left[\frac{d^\mu}{R'}\left(a + \frac{5bT}{4\omega' R'}\right) + \frac{d^\mu}{R''}\left(a + \frac{bT}{4\omega' R'}\right)\right].$$

Wenn man den von der Steifigkeit des Seiles und von den Reibungen an den Axen herrührenden Totalverlust an Arbeit mit dem vergleichen will, welcher statt fände, wenn zur Uebertragung der Bewegung zwischen zwei in derselben Ebene liegenden horizontalen Wellen ein Zahnräderwerk angewandt würde; so muß man zu dem vorhergehenden Ausdrucke noch den hinzufügen, welcher den durch die Reibungen auf den beiden Axen entsprechenden Verlust ausdrückt, und die Summe mit dem Ausdrucke vergleichen, welcher den analogen Verlust an Arbeit für das Räderwerk ausdrückt.

Bei der Anwendung des Seiles hat man zunächst für die Reibungen, wenn die Zapfen der beiden Wellen einander völlig gleich sind und einen Halbmesser $\rho$ haben, und $\pi'$, $\pi''$ die Gewichte der beiden Wellen bezeichnen:

$$\omega' \frac{\rho f}{\sqrt{1+f^2}} \sqrt{\left(\pi' + \frac{T}{\omega' R}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{T}{\omega' R'}\right)^2}$$

$$+ \omega'' \frac{\rho f}{\sqrt{1+f^2}} \sqrt{\left(\pi'' + \frac{TR''}{\omega' R' R'''}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{T}{\omega' R'}\right)^2},$$

wo **R** der Radius für den Punkt, auf welchen die Bewegungskraft der ersten Welle und **R'''** der Radius für den Punkt ist, worin die Widerstandskraft der zweiten Welle wirkt. Wenn dagegen eine Verzahnung angewandt wird, so hat man:

$$T f \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

Wenn die Seile vertikal sind oder die Räder übereinander liegen, so hat man für den von den Reibungen der vier Zapfen, welche gegen die Räder eine symmetrische Lage haben, herrührenden Verlust an Arbeit:

$$\omega \frac{f\rho}{\sqrt{1+f^2}} \left[\pi' + \frac{T}{\omega' R} + \frac{3T}{\omega' R'} - \pi'' + \frac{TR''}{\omega' R' R'''}\right],$$

oder:

$$\omega \frac{f\rho}{\sqrt{1+f^2}} \left[\pi' - \pi'' + \frac{3T}{\omega' R'} + \frac{T}{\omega' R} + \frac{TR''}{\omega' R' R'''}\right],$$

oder wenn $\pi''$ größer ist, als die Summe der Kräfte $\frac{T}{\omega' R'}$, $\frac{TR''}{\omega' R' R'''}$:

$$\omega \frac{f\rho}{\sqrt{1+f^2}} \left[\pi' + \pi'' + \frac{T}{\omega' R} - \frac{TR''}{\omega' R' R'''}\right].$$

## Rollende Reibung.

§. 67. Wenn die Materialien, woraus die einander berührenden Körper bestehen, nicht sehr fest oder hart sind, so findet bei dem Uebereinanderhinrollen dieser Körper ein Verlust an Arbeit statt, welcher von der Zusammendrückung in dem Berührungs=

punkte herrührt, und es gibt Fälle, wo man diese **rollende** Reibung nicht unberücksichtigt lassen darf.

Wir wollen uns einen Cylinder **A** (Fig. 16) denken, welcher auf einer horizontalen Ebene fortrollt und auf dieselbe einen so starken Druck ausübt, daß sie an der Berührungsstelle **B** etwas zusammengedrückt wird; so muß offenbar der Beweger eine gewisse Arbeit anwenden, um diese Zusammendrückung successive in allen Berührungspunkten zu bewirken. Wir wollen annehmen, daß die Kraft des Bewegers eine an der Axe des Cylinders angebrachte horizontale Zugkraft sei, so können wir uns vorstellen, daß auf den Cylinder während seiner Bewegung eine Widerstandskraft von unten nach oben, oder von **C** nach **D** nach der geraden Linie **CD** wirkt, die von einem etwas vor dem tiefsten Punkte des Eindruckes liegenden Punkte in geringer Entfernung vor der Axe des Cylinders hindurchgeht. Selbst wenn die Ebene **B** aus einer sehr elastischen Substanz bestände und nach dem Durchgange des Cylinders ihre ursprüngliche Form wieder annähme, so würde doch ein Verlust an Arbeit statt finden, wie die Erfahrung lehrt, und was man sich erklären kann, wenn man bemerkt, daß die hinter dem Cylinder durch die Wiedererhebung der Vertiefung der Ebene entstehende geringe bewegende Kraft nur dann eine Bewegungsarbeit hervorbringen könnte, welche der vor dem Cylinder durch die Zusammendrückung konsumirten Arbeit gleich wäre, wenn die im Innern der Masse hervorgerufenen Erschütterungen nach dem Vorübergange des Cylinders völlig aufgehört hätten, was nicht statt finden kann, weil sich diese Erschütterungen fortpflanzen.

Die rollende Reibung ist für harte Metalle und Hölzer nur sehr gering und wird desto beträchtlicher, je kleiner der Durchmesser des Cylinders ist, was man sich leicht erklären kann, wenn man bemerkt, daß der Eindruck durch den Cylinder an der Berührungsstelle mit der Ebene um so merklicher wird, je kleiner der Durchmesser des Cylinders ist, und daß folglich daraus auch für eine gewisse auf der Ebene durchlaufene Länge zuletzt eine größere Konsumtion an Arbeit entspringt. In den Lehrbüchern der praktischen Mechanik findet man die wichtigsten Erfahrungsresultate über die Bestimmung der rollenden Reibung *).

## Durch den Stoß verursachte Verluste an Arbeit.

§. 68. Die zweite Aufgabe dieser Art, welche man bei praktischen Anwendungen zu lösen hat, bezieht sich auf den **Stoß** zweier Rotationssysteme, wovon auch als besonderer Fall das eine statt der drehenden Bewegung eine fortrückende haben kann, und

---

*) Poncelet's Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschine; §. 193 und folgg.

es kann z. B. vorkommen, daß man die Arbeitsverluste zu bestimmen hat, welche durch den Stoß des Hebedaumens eines Rades oder einer Welle gegen die Hebelatte eines dadurch zu bewegenden Hammers oder Stampfers verursacht werden. Um den durch den Stoß zweier Rotationssysteme verursachten Verlust an Arbeit zu berechnen, muß man eine Voraussetzung machen, unter welcher dieser Verlust den größten Werth bekommt, und welche mit weiter keinem Nachtheile verbunden ist, während man die entgegengegengesetzte Voraussetzung nicht unbedingt würde machen können. Diese Voraussetzung besteht darin, daß man die zusammenstoßenden Körper als unelastisch betrachtet, so daß sie nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben. Man bestimmt also um wie viel die lebendige Kraft in dem Augenblicke vermindert ist, wo die beiden Körper einander berühren, sich wie zwei Systeme von unveränderlicher Form mit einander fortbewegen und gewissermaßen nur eine Maschine bilden. Es seien:

$\omega_0$, $\omega$ die Winkelgeschwindigkeiten der Daumenwelle vor und nach dem Stoße,

$\omega_0'$, $\omega'$ dieselben Geschwindigkeiten für die Hammerwelle,

**R**, **R'** die von den Rotationsaxen nach dem Berührungspunkte gezogenen Radien,

$\vartheta$, $\vartheta'$ die Winkel, welche dieselben mit der Berührungsebene in dem Berührungspunkte der beiden Systeme bilden,

$\rho$, $\rho'$ die Halbmesser der Zapfen beider Wellen,

$\lambda$ die dem Normaldrucke im Berührungspunkte entsprechende Quantität Bewegung,

$f$, $f'$ die Koefficienten der Zapfenreibungen,

$f_1$ der Koefficient der in dem Berührungspunkte beider Systeme stattfindenden Reibung,

**P**, **Q** die Quantitäten Bewegung für die Zapfen der Daumenwelle,

**P'**, **Q'** dieselben Größen für die Hammerwelle,

$x$, $y$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes des ersten Systemes, indem die Axe der $x$ zu der Tangente in dem Zusammenstoßungspunkte parallel ist,

$x'$, $y'$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes des zweiten rotirenden Systemes,

$dm$, $dm'$ die Massenelemente dieser beiden Systeme,

**K**, **K'** die Trägheitsmomente dieser beiden Systeme,

$\xi'$, $\eta'$ die Koordinaten des Schwerpunktes des zweiten Systemes,

**Π**, **Π'** die resp. Gewichte beider Systeme; so hat man für das erste System die drei Gleichungen (§. 52):

$$\left.\begin{aligned}(\omega-\omega_0)\int xdm &= -\lambda+Q\\ -(\omega-\omega_0)\int ydm &= +f_1\lambda+P\\ (\omega-\omega_0)\frac{K}{g} &= \lambda R\cos\vartheta+f_1\lambda R\sin\vartheta-\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\rho\sqrt{P^2+Q^2}\end{aligned}\right\}.(A)$$

Das Glied $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\sqrt{P^2+Q^2}$ drückt die Reibung aus, wenn die Resultante aus dem Drucke und aus der Reibung $=\sqrt{P^2+Q^2}$ ist; denn alsdann muß der Winkel, welchen diese Kraft mit der Richtung des Druckes bildet, dem Reibungswinkel gleich sein, dessen Tangente $f$ ist, und die Tangentialkomponente von $\sqrt{P^2+Q^2}$ oder die Reibung ist das Produkt aus diesem Ausdrucke und dem Sinus des Winkels, dessen Tangente $f$ ist.

Für das zweite System hat man ebenso:

$$\left.\begin{aligned}(\omega'-\omega'_0)\int x'dm' &= +\lambda+Q'\\ -(\omega'-\omega'_0)\int y'dm' &= -f_1\lambda+P'\\ (\omega'-\omega'_0)\frac{K'}{g} &= -\lambda R'\cos\vartheta'+f_1\lambda R'\sin\vartheta'-\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\rho'\sqrt{P'^2+Q'^2}\end{aligned}\right\}.(B)$$

Diese sechs Gleichungen geben die Größen $\lambda$, $P$, $Q$, $P'$, $Q'$ und eine Gleichung mit $\omega$ und $\omega'$.

Da die beiden Systeme nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben sollen, so sind die Normalgeschwindigkeiten in dem Berührungspunkte einander gleich, und man hat folglich noch die Gleichung:

$$\omega R\cos\vartheta=\omega' R'\cos\vartheta',$$

so daß man die Geschwindigkeiten $\omega$, $\omega'$ und die lebendige Kraft nach dem Stoße bestimmen kann.

Wenn wir zunächst für den einfachsten Fall annehmen, daß die Schwerpunkte beider Systeme auf den Rotationsaxen liegen, daß $\omega'=0$ ist, und daß die Reibungen nicht in Betracht gezogen werden; so haben wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}-\lambda+Q&=0\\ P&=0,\\ (\omega-\omega_0)\frac{K}{g}&=\lambda R\cos\vartheta\\ -\lambda&=Q',\\ 0&=P'\\ \omega'\frac{K'}{g}&=-\lambda R'\cos\vartheta',\end{aligned}$$

woraus sich ergibt, wenn man $\lambda$ eliminirt:

$$(\omega - \omega_0)\frac{K}{g}R'\cos\vartheta' + \omega'\frac{K'}{g}R\cos\vartheta = 0,$$

und da $\omega R\cos\vartheta = \omega' R'\cos\vartheta'$ ist; so findet man:

$$\omega\frac{K}{g}R'\cos\vartheta' - \omega_0\frac{K}{g}R'\cos\vartheta' + \frac{\omega R^2\cos^2\vartheta}{R'\cos\vartheta'}\cdot\frac{K'}{g} = 0,$$

woraus folgt:

$$\omega = \frac{\omega_0 KR'^2\cos^2\vartheta'}{KR'^2\cos^2\vartheta' + K'R^2\cos^2\vartheta},$$

und ebenso fände man:

$$\omega' = \frac{\omega_0 KRR'\cos\vartheta\cos\vartheta'}{KR'^2\cos^2\vartheta' + K'R^2\cos^2\vartheta}.$$

Wenn man der Kürze wegen $R\cos\vartheta = p$, $R'\cos\vartheta' = p'$ setzt, so hat man:

$$\omega = \frac{\omega_0 K}{K + K'\frac{p^2}{p'^2}},\quad \omega' = \frac{\omega_0 K\frac{p}{p'}}{K + K'\frac{p^2}{p'^2}},$$

woraus folgt, daß die lebendige Kraft nach dem Stoße ist:

$$\frac{K\omega^2 + K\omega'^2}{2g} = \frac{\frac{\omega_0^2}{2g}K^2\left(K + K'\frac{p^2}{p'^2}\right)}{\left(K + K'\frac{p^2}{p'^2}\right)^2} = \frac{\omega_0^2}{2g}\cdot\frac{K^2}{K + K'\frac{p^2}{p'^2}}.$$

Vor dem Stoße war dieselbe aber $= \frac{\omega_0^2}{2g}K$, und folglich hat sie sich in dem Verhältnisse von $K$ zu $K + K'\frac{p^2}{p'^2}$, d. h. in dem Verhältnisse der lebendigen Kräfte geändert, welche das stoßende System und die beiden vereinigten Systeme haben würden, wenn das zweite durch das erste geführt würde.

Der Verlust an lebendiger Kraft wird ausgedrückt durch:

$$\frac{K\omega_0^2}{2g} \cdot \frac{K' \frac{p^2}{p'^2}}{K + K' \frac{p^2}{p'^2}}$$

und derselbe verhält sich folglich zu der lebendigen Kraft vor dem Stoße, wie die lebendige Kraft, welche das gestoßene System haben würde, wenn es durch das andere geführt würde, zu der lebendigen Kraft beider Systeme.

Wenn in dieser Voraussetzung das gestoßene System gegen das andere, wovon es fortbewegt wird, eine geringere lebendige Kraft haben müßte; so könnte $K' \frac{p^2}{p'^2}$ gegen $K$ vernachlässigt werden, und man hätte für den Verlust an lebendiger Kraft den Ausdruck:

$$K' \frac{p^2}{p'^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{2g};$$

aber alsdann wäre die Geschwindigkeit, welche das gestoßene System annehmen würde, genau gleich $\omega_0 \frac{p}{p'}$ während das andere System nahezu seine Geschwindigkeit $\omega_0$ beibehielte, und in diesem Falle ist also der Verlust an lebendiger Kraft der ganzen lebendigen Kraft gleich, welche das gestoßene System annimmt.

Wenn man $\omega'_0$ nicht $= 0$ gesetzt hätte, so hätte man gefunden, daß der durch den Stoß verursachte Verlust an lebendiger Kraft ausgedrückt wird durch:

$$\frac{KK'}{2g} \cdot \frac{\left(\omega'_0 - \omega_0 \frac{p}{p'}\right)^2}{K + K' \frac{p^2}{p'^2}},$$

oder:

$$\frac{K\omega_0^2}{2g} \cdot \frac{K' \left(\omega'_0 - \omega_0 \frac{p}{p'}\right)^2}{\left(K + K' \frac{p^2}{p'^2}\right) \omega_0^2}.$$

Der Verlust an lebendiger Kraft verhält sich also zu der lebendigen Kraft des stoßenden Systemes vor dem Stoße, wie die fingirte lebendige Kraft, welche das andere System haben würde, wenn es eine Geschwindigkeit annähme, welche die Differenz zwischen der ist, die dasselbe wirklich hat und zwischen der, welche es haben würde, wenn es von dem andern Systeme fortbewegt würde zu der lebendigen Kraft beider Systeme in dieser Voraussetzung.

Wenn $K' \frac{p}{p'}$ gegen $K$ sehr klein ist, so wird der Verlust an lebendiger Kraft nahezu ausgedrückt durch:

$$\frac{K'}{2g}\left(\omega'_0 - \omega_0 \frac{p}{p'}\right)^2,$$

d. h. derselbe ist der lebendigen Kraft gleich, welche das System mit der kleinsten lebendigen Kraft haben würde, wenn es eine Geschwindigkeit hätte, welche die Differenz zwischen der seinigen und der Geschwindigkeit ist, welche es haben würde, wenn es von dem andern Systeme vor dem Stoße bewegt wäre.

Alle vorhergehenden Betrachtungen über die durch den Stoß verursachten Verluste an lebendiger Kraft in dem Falle, wo man die Reibungen nicht in Betracht zu ziehen braucht, sind auch auf fortrückende Systeme anwendbar, wenn man die Gewichte der Körper für die virtuellen lebendigen Kräfte setzt, welche wir als Koefficienten angewandt haben, um die Verluste der lebendigen Kräfte auszudrücken. In dem allgemeinern Falle, wo die Schwerpunkte der Systeme nicht auf den Drehungsaxen liegen, die Reibungen in Betracht gezogen werden und wieder wie im Vorhergehenden angenommen wird, daß die Körper nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben, muß man die vollständigen Gleichungen (A), (B) anwenden.

Die Rechnungen werden aber fast unausführbar, wenn man die von den Wurzelgrößen herrührenden Schwierigkeiten nicht beseitigt, was auf zwei verschiedene Arten geschehen kann, indem man nämlich $Q$, $Q'$ so bestimmt, als wenn keine Reibung statt fände, die gefundenen Werthe in diese Gleichungen substituirt und die Rechnung wiederholt, oder die Poncelet'sche Methode anwendet, welche darin besteht, daß man die Wurzelgröße $\sqrt{P^2+Q^2}$ näherungsweise durch den linearen Ausdruck $\alpha P + \beta Q$ oder $Pr\cos\psi + Qr\sin\psi$ darstellt, worin $\alpha$, $\beta$ oder $r$, $\psi$ so gewählte Konstanten sind, daß der größte wahrscheinliche numerische Fehler nach einer vorläufigen Beurtheilung der Grenzen, zwischen welchen das Verhältniß $\frac{P}{Q}$ liegt, wo $P$ und $Q$ absolute Zahlenwerthe ohne Zeichen sind, ein Minimum wird.

Auf diese Weise findet man:

für $\frac{P}{Q} > 1$, $r\cos\psi = \alpha = 0{,}96$, $r\sin\psi = \beta = 0{,}40$, Fehler $\frac{1}{25}$

$\frac{P}{Q} > 2$, $0{,}98$, $0{,}23$, $\frac{1}{71}$

$\frac{P}{Q} > 3$, $0{,}99$, $0{,}16$, $\frac{1}{154}$

$\frac{P}{Q} > 4$, $0{,}99$, $0{,}12$, $\frac{1}{266}$

Wir wollen nun diese Methode auf den Stoß der Daumen einer Welle gegen den Helm eines Schmiedehammers anwenden, indem wir annehmen, daß sich der Hammer vor dem Stoße in Ruhe befindet, und der Schwerpunkt des Systemes der Daumenwelle in der Drehungsaxe derselben liegt, und folglich setzen:

$$r(P\cos\psi + Q\sin\psi) \text{ für } \sqrt{P^2+Q^2}$$

und:

$$r(P'\cos\psi + Q'\sin\psi) \text{ für } \sqrt{P'^2+Q'^2},$$

indem $r$, $\psi$ so angenommen werden, daß der begangene Fehler innerhalb der Grenzen zwischen welche das Verhältniß $\frac{P}{Q}$ fallen kann, ein Minimum wird.

Zur Bestimmung der Bewegung nach dem Stoße hat man für die Daumenwelle:

$$0 = -\lambda + Q$$

$$0 = +f_1\lambda + P$$

$$(\omega - \omega_0)\frac{K}{g} = \lambda R\cos\vartheta + f_1\lambda R\sin\vartheta - \frac{rf\varrho(P\cos\psi + Q\sin\psi)}{\sqrt{1+f^2}},$$

für den Hammer:

$$\frac{\omega'\Pi'\xi'}{g} = \lambda + Q'$$

$$-\frac{\omega'\Pi'\eta'}{g} = -f_1\lambda + P'$$

$$\frac{\omega'K'}{g} = -\lambda R'\cos\vartheta' + f_1\lambda R'\sin\vartheta' - \frac{rf'\varrho'(P'\cos\psi + Q'\sin\psi)}{\sqrt{1+f'^2}}$$

und für beide Systeme:

$$\omega R\cos\vartheta = \omega' R'\cos\vartheta',$$

welche sieben Gleichungen die sieben unbekannten Größen P, Q, P′, Q′, λ, ω, ω′ bestimmen. Es ergibt sich daraus:

$$Q = \lambda,$$
$$P = -f_1 \lambda,$$
$$(\omega - \omega_0)\frac{K}{g} = \lambda R(\cos\vartheta + f_1 \sin\vartheta) + \frac{rf\rho\lambda(f_1 \cos\psi - \sin\psi)}{\sqrt{1+f^2}},$$
$$Q' = \frac{\omega'\Pi'\xi'}{g} - \lambda,$$
$$P' = f_1\lambda - \frac{\omega'\Pi'\eta'}{g},$$
$$\frac{\omega' K'}{g} = - R'(\cos\vartheta' - f_1 \sin\vartheta')$$
$$- \frac{rf'\rho'\lambda(f_1 \cos\psi - \sin\psi)}{\sqrt{1+f'^2}} - \frac{rf\rho\omega\Pi}{g}(\xi' \sin\psi - \eta' \cos\psi),$$

und wenn man setzt:

$$f_1 = \operatorname{tang}\varphi_1,\ f = \operatorname{tang}\varphi,\ f' = \operatorname{tang}\varphi',$$
$$\eta = l' \sin\mu, \quad \text{und} \quad \xi' = l' \cos\mu,$$

so erhält man:

$$(\omega - \omega_0)\frac{K}{g} = \lambda R \frac{\cos(\vartheta - \varphi_1)}{\cos\varphi_1} - \frac{rf\rho\lambda}{\sqrt{1+f^2}} \cdot \frac{\sin(\varphi_1 - \psi)}{\cos\varphi_1},$$
$$\frac{\omega' K'}{g} = - \lambda R' \frac{\cos(\vartheta' + \varphi_1)}{\cos\varphi_1} - \frac{rf'\rho'\lambda}{\sqrt{1+f'^2}} \cdot \frac{\sin(\varphi_1 - \psi)}{\cos\varphi_1}$$
$$- \frac{rf'\rho'\Pi' l' \omega' \sin(\psi - \mu)}{g},$$

und:

$$\omega R \cos\vartheta = \omega' R' \cos\vartheta'.$$

Wenn man λ zwischen den beiden ersten Gleichungen eliminirt, so bekommt man:

$$\frac{(\omega - \omega_0) K}{\omega' K' + rf'\rho'\Pi' l' \omega' \sin(\psi - \mu)} =$$
$$\frac{rf\rho \sin(\varphi_1 - \psi) - R\cos(\vartheta - \varphi_1)\sqrt{1+f^2}}{R'\cos(\vartheta' + \varphi_1)\sqrt{1+f'^2} + rf'\rho' \sin(\varphi_1 - \psi)} \times \frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{1+f^2}},$$

und wenn man den zweiten Theil dieser Gleichung der Kürze wegen mit $-\alpha$ bezeichnet; so erhält man:

$$\omega K + \alpha\omega' [K' + rf'\rho' \Pi' l' \sin(\psi-\mu)] = K\omega_0 ,$$

und:

$$\omega R \cos\vartheta - \omega' R' \cos\vartheta' = 0.$$

Setzt man ebenso zur Abkürzung $rf'\varphi'\Pi' l' = \beta$, so kommt:

$$K\omega + \alpha(K' + \beta)\omega' = K\omega_0 ,$$
$$R\cos\vartheta . \omega - R' \cos\vartheta' \omega' = 0 ,$$

woraus folgt:

$$\omega' = \frac{KR\omega_0 \cos\vartheta}{KR' \cos\vartheta' + R\alpha(K' + \beta)\cos\vartheta}$$

und:

$$\omega = \frac{KR'\omega_0 \cos\vartheta'}{KR' \cos\vartheta' + R\alpha(K' + \beta)\cos\vartheta} .$$

Um den durch den Stoß verursachten Verlust an lebendiger Kraft zu erhalten, braucht man nur den Ausdruck:

$$\frac{K\omega_0^2}{2g} - \frac{K\omega^2}{2g} - \frac{K'\omega'^2}{2g}$$

zu berechnen. Substituirt man die obigen Werthe in denselben, so findet man:

$$\frac{K\omega_0^2}{2g}\left[1 - \frac{R^2\cos^2\vartheta + R'^2\cos^2\vartheta'}{\left[R'\cos\vartheta' + \frac{\alpha(K'+\beta)}{K} R\cos\vartheta\right]^2}\right].$$

Wenn man die Quadrate der Brüche $f$, $f_1$ und $f'$, welche die Verhältnisse der Reibungen zu den bei dem Stoße entstehenden Quantitäten Bewegung in normaler Richtung ausdrücken, vernachlässigt; so erhält man:

$$\alpha\left(\frac{K'}{K} + \beta\right) = \frac{K'R\cos\vartheta}{KR'\cos\vartheta'} .$$

Statt für jeden Körper die Gleichungen der Aequivalenz zu nehmen, könnte man eine einzige Gleichung für das ganze System nehmen, welche seiner Konstitution nach dem Stoße entspricht, und dann diese Aequivalenz durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausdrücken, indem man für die Geschwindigkeiten die nach dem Stoße statt findenden nähme. Die virtuellen Momente der beiden Reibungen wären alsdann offenbar nach Verrichtung aller Reduktionen von der Form $Fdf$ gewesen, wo $F$ die Stärke der Reibung und $df$ die Trennungsgeschwindigkeit der Berührungspunkte am Ende des Stoßes ist. Nun ist aber leicht einzusehen, daß diese Geschwindigkeit $df = 0$ ist, wenn der Punkt worin der Stoß statt findet auf der Mittelpunktslinie liegt, und daß diese Geschwindigkeit sehr klein ist, wenn dieser Punkt nur wenig von dieser Linie entfernt ist. Denn da alsdann die wirklichen Geschwindigkeiten dieser Punkte dieselbe Richtung haben, und ihre Komponenten nach der gemeinschaftlichen Normale auf den beiden Berührungsflächen einander gleich sind, so müssen sie selbst auch einander gleich sein, und folglich ist die relative Geschwindigkeit $df$ der beiden Berührungspunkte gleich Null.

Zu demselben Resultate würde man durch die einzelnen Gleichungen gelangt sein, welche die Aequivalenz für jeden Körper ausdrücken, wenn man bemerkt, daß in diesem Falle die Momente der Quantität der Bewegung, deren Komponenten $\lambda$ und $\lambda f_1$ sind, in den beiden Systemen der Momentengleichungen den Perpendikeln $p$ und $p'$ proportional sind, so daß man diese Momente aus den Momentengleichungen eliminirt, wie wenn die Glieder $f_1\lambda$ nicht existirten.

Es gibt einen besondern Fall, wo die Quantitäten der Bewegung $P'$ und $Q'$ Null sind, nämlich wenn die Richtung der von dem Stoße herrührenden Quantität Bewegung durch den sogenannten Mittelpunkt des Stoßes geht. Wir wollen diese Voraussetzung in den vorhergehenden Gleichungen, welche sich auf den Hammer beziehen, annehmen, und die Koordinatenaxen so annehmen, daß die Axe der $\eta'$ die Richtung der Resultante aus $\lambda$ und $f_1\lambda$ ist. Alsdann haben wir, wenn wir die Komponenten der bei dem Stoße auf die Zapfen wirkenden Quantitäten der Bewegung einander gleich setzen:

$$(\omega' - \omega'_0)\frac{\Pi'}{g}\eta' = \lambda\sqrt{1+f_1^2}$$

$$-(\omega' - \omega'_0)\frac{\Pi'}{g}\xi' = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen giebt $\xi' = 0$, d. h. der Schwerpunkt liegt in dem auf die Richtung des Stoßes $\lambda\sqrt{1+f_1^2}$ gefällten Perpendikel, und wenn man alsdann die Gleichung der Momente bildet, woraus das Glied mit $\sqrt{P^2+Q^2}$ verschwindet, so hat man:

$$(\omega' - \omega'_0)\frac{K'}{g} = \lambda\sqrt{1+f_1^2}\,.\,l,$$

wo $l$ das von der Axe auf die Richtung der Resultante $\lambda\sqrt{1+f_1^2}$ gefällte Perpendikel bezeichnet. Aus dieser und der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen ergibt sich:

$$l = \frac{K'}{\Pi'\eta'},$$

welches die Entfernung der Rotationsaxe von der durch den Punkt, worin die Berührung statt findet, gehenden gerade Linie ist, deren Richtung mit der Richtung der durch den Stoß hervorgebrachten Quantität Bewegung $\lambda\sqrt{1+f_1^2}$ zusammenfällt.

Der Punkt, welcher auf dem durch den Schwerpunkt des Systemes gehenden Radiusvektor in der Entfernung $l$ von der Drehungsaxe liegt, wird der Mittelpunkt des Stoßes des Systemes genannt, und es kann einen solchen Punkt nur dann geben, wenn der Schwerpunkt des Systemes nicht auf der Drehungsaxe liegt. Wenn $K'_1$ das Trägheitsmoment des Systemes in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende und zu der Drehungsaxe parallele Axe bezeichnet, so hat man:

$$K' = K'_1 + \Pi'\eta'^2, \text{ folglich: } l = \eta' + \frac{K'_1}{\Pi'\eta'},$$

woraus man sieht, daß der Mittelpunkt des Stoßes immer jenseits des Schwerpunktes liegt, und derselbe ist der Drehungsaxe am nächsten, wenn man hat:

$$\eta' = \sqrt{\frac{K'_1}{\Pi'}}, \quad \text{folglich: } l = 2\eta' = 2\sqrt{\frac{K'_1}{\Pi'}}.$$

Das Vorhergehende läßt sich auf das Einrammen der Pfähle anwenden. Es bezeichne $p$ das Gewicht des Rammklotzes, $p'$ das des einzurammenden Pfahles, $v_0$ die Geschwindigkeit des Rammklotzes in dem Augenblicke, wo derselbe den Pfahl erreicht und $v$ die Geschwindigkeit desselben Klotzes am Ende des Stoßes, und endlich bezeichne $\mathbf{R}$ den veränderlichen Widerstand des Pfahles, welcher während der ganzen Dauer des Einsenkens desselben wirkt. Zunächst wollen wir annehmen, daß die Kraft $\mathbf{R}$ während der Dauer des Stoßes des Rammklotzes gegen den Pfahl bis zu dem Augenblicke, wo das Ende des Pfahles die Geschwindigkeit des Rammklotzes annimmt, noch nicht gewirkt habe, d. h. daß die Bewegung noch nicht auf das Ende des Pfahles übertragen sei, und daß, wenn diese Bewegung übertragen ist, auch der Stoß vollendet sei, so daß der Pfahl die Geschwindigkeit des Rammklotzes angenommen hat. Unter dieser Voraussetzung findet man, daß der Pfahl und der Rammklotz nach dem Stoße die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{pv_0}{p+p'},$$

und folglich die lebendige Kraft:

$$(p+p')\frac{v^2}{2g}\text{, oder: }\frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{v_0{}^2}{2g}$$

haben. Soll aber diese lebendige Kraft durch den Widerstand **R** des Bodens aufgehoben werden, so muß man haben:

$$\frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{v_0{}^2}{2g}\int \mathrm{R}dx,$$

wo $dx$ das Element des vertikalen Eindringens des Pfahles in den Boden bezeichnet. Wenn **H** die ganze Höhe ausdrückt, von welcher der Rammklotz herabgefallen und $h$ die Höhe ist, um welche der Pfahl eingeschlagen ist, also $h=\int dx$; so hat man nahezu, wenn man annimmt, daß sich **R** während des Eindringens des Pfahles nicht merklich ändert:

$$\frac{p^2}{p+p'}\mathrm{H}=\int_0^h \mathrm{R}dx=\mathrm{R}h,$$

woraus folgt:

$$\mathrm{R}=\frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{\mathrm{H}}{h}.$$

Wenn **R** desto größer wird, je tiefer der Pfahl in den Boden eindringt, oder wenigstens konstant bleibt, und $\mathrm{R}_1$ bezeichnet den letzten Werth von **R**, welcher folglich der größte ist; so hat man:

$$\int \mathrm{R}dx=\text{ oder }<\mathrm{R}_1h;$$

also:

$$\mathrm{R}_1=\text{ oder }>\frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{\mathrm{H}}{h}.$$

In der vorhergehenden Voraussetzung wäre also der Widerstand des Bodens am Ende jedes Stoßes wenigstens dem Produkte $\frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{\mathrm{H}}{h}$ gleich, und der Pfahl könnte mit einem durch dieses Produkt ausgedrückten Gewichte belastet werden, ohne tiefer in den Boden einzudringen. Wenn z. B. der Rammklotz 500 Kilogr. wiegt, und von einer Höhe von 4 Meter auf einen eichenen Pfahl von 300 Kilogr. Gewicht fällt, welcher bei jedem Schlage um $0^{\mathrm{m}},004$ eingetrieben wird; so ist $\mathrm{R}_1>312500$ Kilogr. Dieses Resultat beruht aber auf einer Voraussetzung, deren Richtigkeit nicht erwiesen und sogar zweifelhaft ist. Wenn man also, um die Untersuchung nicht zu beschränken, annimmt, daß die Kraft **R** während der Dauer des Stoßes gewirkt hat, und daß $\int \mathrm{R}dt$ die dieser Kraft entsprechende Quantität der Bewegung für die Dauer des Stoßes ausdrückt; so hat man:

$$p(v-v_0)=p'v+\int \mathrm{R}dt,$$

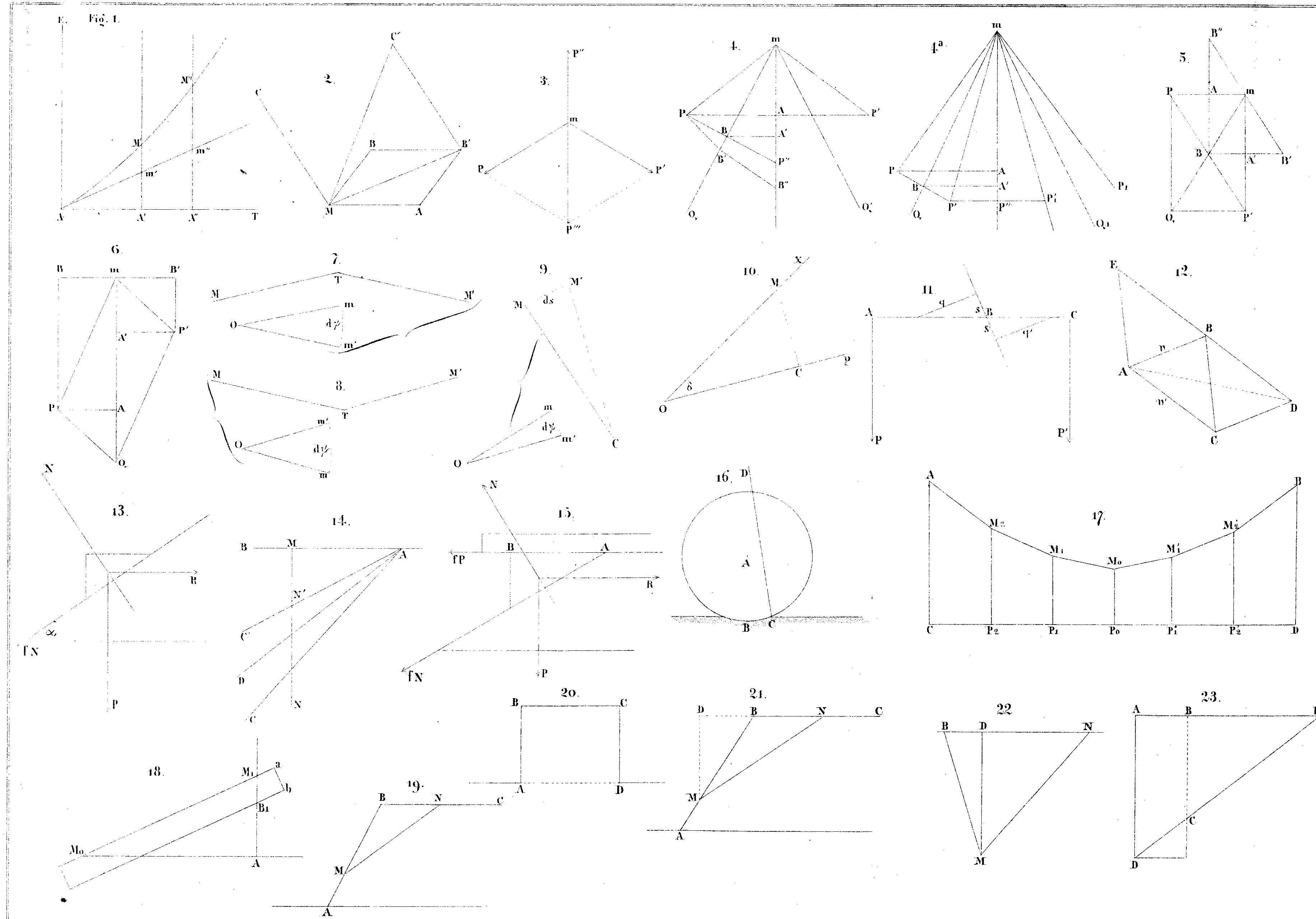
woraus folgt:

$$v=\frac{pv_0-\int \mathrm{R}dt}{p+p'}.$$

Die lebendige Kraft des Systemes nach dem Stoße ist folglich:

$$\frac{(pv_0-\int \mathrm{R}dt)^2}{p+p'}, \quad \text{und} \quad \frac{(pv_0-\int \mathrm{R}dt)^2}{p+p'}=\int \mathrm{R}dx=\mathrm{R}_1 h.$$

Diese Gleichung würde für $\mathrm{R}_1$ einen kleinern Werth, als der vorhergehende geben; allein man hat kein Mittel, den Werth von $\mathrm{R}_1$ aus dieser Gleichung abzuleiten, indessen zeigt sie doch wenigstens, daß es nicht vortheilhaft sein würde, wenn man auf den Pfahl eine größere Last, als $\frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{\mathrm{H}}{h}$ wollte wirken lassen, und daß man diese Last in der Praxis sogar kleiner nehmen müßte.




Lith. b. Stapler et Comp.